ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ 2010

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΑΣΦΑΛΙΣΕΩΝ

9 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010

ΑΠΟΓΕΥΜΑΤΙΝΗ ΕΞΕΤΑΣΗ (12 μ. – 2 μ.μ.)

1. (6 βαθμοί) Δίδεται η σ.π.π. $f(x)=\frac{ak^a}{x^{a+1}}, \mathrm{x} \geq \mathrm{k}, a>0, k \geq 0$, και τρεις τυχαίες παρατηρήσεις $x_1=3, \quad x_2=5$ και $x_3=9$. Να εκτιμηθούν οι παράμετροι a και k με τη μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας.

2. (6 βαθμοί) Μια καινούρια ασφαλιστική εταιρία ειδικεύεται στον κλάδο αστικής ευθύνης εργοδοτών. Ι) Να προτείνετε ένα μέτρο έκθεσης στον κίνδυνο για τον συγκεκριμένο κλάδο. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά εκείνα που το καθιστούν καλό μέτρο έκθεσης στον κίνδυνο; ιι) Η εταιρία αυτή καλείται να σχηματίσει για πρώτη φορά αποθέματα. Ποια μέθοδο προτείνετε να χρησιμοποιήσει και για ποιους λόγους θεωρείται εξαιρετικά σημαντική η ορθή εκτίμηση των αποθεμάτων;

3. (8 βαθμοί) Η διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων S είναι σύνθετη διωνυμική. Το πλήθος των αποζημιώσεων N ακολουθεί κατανομή με σ.π.π. $f(n)=\binom{10}{n} p^n (1-p)^{10-n}$, όπου η παράμετρος p ακολουθεί $f(p)=4p^3$, $0 \leq p \leq 1$. Το μέγεθος της αποζημίωσης X ακολουθεί κατανομή $Gamma\left(300, \frac{1}{\mathrm{b}}\right)$ όπου η παράμετρος b ακολουθεί $f(b)=0{,}1e^{-0{,}1b}$, $b>0$.

   Την προηγούμενη περίοδο παρατηρήθηκαν 10 ζημιές με μέσο 2.850.

   a. Να γίνει εκτίμηση του $\hat{s}$ από τις συνολικές αποζημιώσεις.
   b. Να γίνει εκτίμηση του $\hat{n}$ με τη μέθοδο Buhlmann
   c. Να δοθεί η ύστερη κατανομή του p, δεδομένου δείγματος $n_1, n_2, \ldots, n_k$
   d. Να γίνει εκτίμηση του $\hat{n}$ με τη μέθοδο Bayes
   e. Διατυπώστε με σαφήνεια το θεώρημα του Ericson και δείξτε ότι στην περίπτωση της εκτίμησης του $\hat{n}$ ισχύουν όλες οι υποθέσεις του.

4. (10 βαθμοί) Μια ασφαλιστική εταιρεία έχει ολοκληρώσει το πρώτο στάδιο εκτίμησης των ασφαλίστρων που θα πρέπει να χρεώσει την ερχόμενη περίοδο αλλά θέλει σε ένα δεύτερο στάδιο να λάβει υπόψη της 2 επιπλέον παράγοντες τιμολόγησης, την ηλικία του οδηγού και το φύλλο. Αποφάσισε να εφαρμόσει ένα γενικευμένο γραμμικό πρότυπο, με λογαριθμικό μετασχηματισμό ($g(x) = \ln x$) και να θέσει τα ασφάλιστρα P που προκύπτουν από το πρώτο στάδιο της τιμολόγησης ως αντιστάθμισμα (offset). Οι ζημιές ακολουθούν κανονική κατανομή και το μοντέλο που εφαρμόζεται είναι $E(Y) = \mu = g^{-1}(X\beta + \ln P)$.

Δίνονται επίσης

Ποσό ζημιάς

	Άνδρες	Γυναίκες
Ηλικιακή ομάδα 1	100	150
Ηλικιακή ομάδα 2	216	120

Ασφάλιστρα

	Άνδρες	Γυναίκες
Ηλικιακή ομάδα 1	500	450
Ηλικιακή ομάδα 2	600	200

a. Αν η παράμετρος β_1 αφορά τους άνδρες, η β_2 την ηλικιακή ομάδα 1 και η β_3 την ηλικιακή ομάδα 2, να δείξετε ότι

$$\beta = \begin{pmatrix} -1{,}01846 \\ -0{,}05525 \\ -0{,}925399 \end{pmatrix}.$$

b. Ποια εκτίμηση δίνει το μοντέλο για το δείκτη ζημιάς (loss ratio) κάθε κατηγορίας;

c. Το μοντέλο χαρακτηρίζεται προσθετικό ή πολλαπλασιαστικό; Εξηγείστε.

d. Ποια εκτίμηση δίνει για το ασφάλιστρο που θα πρέπει να χρεωθεί τελικά στους άνδρες που ανήκουν στην ηλικιακή ομάδα 1;

5. (4 βαθμοί) Αν εφαρμοστεί το μοντέλο $\ln P_{ij} = a + b \cdot j^2 + \varepsilon_{ij}$, όπου $\varepsilon_{ij} \sim N\left(0, \sigma^2 = 0{,}001\right)$ οι μελλοντικές πληρωμές και η μήτρα διακυμάνσεων των μελλοντικών πληρωμών εκτιμώνται ως ακολούθως

Μελλοντικές πληρωμές

	j=1	j=2
2011		x
2012	12,91	19,00

$$Var(P) = \begin{pmatrix} 30{,}28 & & \\ 1{,}72 & 8{,}38 & \\ 14{,}18 & 1{,}72 & 30{,}28 \end{pmatrix}$$

Τι ποσό αναμένεται να πληρωθεί το 2012 και ποια είναι η αντίστοιχη τυπική απόκλιση;

6. (8 βαθμοί) Μια ασφαλιστική εταιρεία έχει τιμολογήσει τον κίνδυνο της θραύσης σωληνώσεων από πάγο ανά περιοχή πριν από 2 χρόνια και από τότε δεν έχει προχωρήσει σε καμία τιμολογιακή μεταβολή. Θέλει να εισάγει στο μοντέλο τιμολόγησης το ιδιοκτησιακό καθεστώς και να διαμορφώσει ένα νέο τιμολόγιο που θα ισχύσει από 1/1/2010 ως 30/6/2010. Θα βασιστεί κατά 40% σε δεδομένα ζημιών των συμβολαίων που εκδόθηκαν το 2006 και κατά 60% σε ζημιές των συμβολαίων που εκδόθηκαν το 2007. Σε όλα τα χρόνια της λειτουργίας της, η εταιρεία εκδίδει ετήσια συμβόλαια ενώ τόσο η κατανομή της έκδοσης των συμβολαίων όσο και η κατανομή των ζημιών είναι ομοιόμορφη.

Έτος συμβολαίου	Κόστος ζημιών την 31/12/2009 2006	2007	Μέση διαφοροποίηση (average differential) της των περιοχών σε κάθε κατηγορία ιδιοκτησίας	Τρέχον μέσο ασφάλιστρο
ιδιοκτήτης	7500	8000	1,1	8000
ενοικιαστής	11000	12300	1,6	12300

	Δεδουλευμένες μονάδες έκθεσης στον κίνδυνο
ιδιοκτήτης	150
ενοικιαστής	100

Ο πληθωρισμός των ζημιών εκτιμάται σε 3% ετησίως. Οι ζημιές αναμένεται να εξελιχθούν ως εξής

ult/0	1,8
ult/2	1,1
ult/3	1,02

Αν θεωρήσετε ότι οι ιδιοκτήτες στην περιοχή της Αθήνας αποτελούν τη βασική κατηγορία, και ο μέγιστος επιτρεπτός δείκτης ζημιών είναι 70%, προτείνετε ασφάλιστρο για τους ενοικιαστές στην περιοχή της Αθήνας

a. με τη μέθοδο του δείκτη ζημιάς
b. με τη μέθοδο του μέσου κόστους, κάνοντας τις απαραίτητες διορθώσεις.

7. (8 βαθμοί) Σε ένα κλάδο με βραχεία εξέλιξη ζημιών παρατηρούνται τα εξής δεδομένα

Σωρευτικά πληρωθείσες ζημιές

Έτος συμβολαίου	Έτος εξέλιξης 0	1	2	Τελικές ζημιές
2004	36.600	41.580	43.659	44.096
2005	68.002	87.383	91.839	92.757
2006	72.954	93.235	98.083	99.260
2007	75.692	97.113	102.066	
2008	76.750	118.394		
2009	78.368			

Ασφάλιστρα

Έτος	Δεδουλευμένα	Εγγεγραμμένα
2004	95.000	92.150
2005	97.500	94.600
2006	104.700	101.600
2007	109.935	106.600
2008	115.432	112.000
2009	121.204	117.600

Από 1/1/2005 εφαρμόζεται νέα νομοθεσία που αυξάνει σημαντικά το ανώτατο όριο της αποζημίωσης. Επιπλέον μια ασυνήθιστα μεγάλη ζημιά 20.000 € σε συμβόλαιο που γράφτηκε το 2008, πληρώθηκε και έκλεισε το δεύτερο έτος εξέλιξης.

a. Εκτιμήστε το απόθεμα στις 31/12/2009 με τη μέθοδο chain ladder, αναλύοντας τις υποθέσεις που κάνετε.
b. Εκτιμήστε το απόθεμα στις 31/12/2009 με τη μέθοδο Bornhuetter Ferguson, αναλύοντας τις υποθέσεις που κάνετε.
c. Εξηγείστε τη διαφορά που προκύπτει μεταξύ των εκτιμήσεων των δύο εναλλακτικών μεθόδων στη συγκεκριμένη περίπτωση. Ποια επιπλέον στοιχεία θα θέλατε να έχετε στη διάθεσή σας προκειμένου να αποφασίσετε ποια από τις δύο εκτιμήσεις είναι η «ορθότερη»;