ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ** **ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:	**Επίθετο:**			
Ημερομηνία:	**Πρωί:**		**Απόγευμα:**	**x**
Θεματική ενότητα:Χρηματοοικονομικά πρότυπα, ΚΩΔ Αε				

Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α
ΣΕ ΟΛΟΥΣ !!!!!!!!!!!

1. Η μετοχή Sέχει σημερινή τιμή S_0και οι μελλοντικές της τιμές προσδιορίζονται από τη γεωμετρική κίνηση Brown$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$όπου rη ακίνδυνη ένταση ανατοκισμού και W_t ανέλιξη Wiener. Ένας επενδυτής αγοράζει ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (calloption) επί της μετοχής Sμε λήξη σε χρόνο T, ενώ ένας άλλος συνάπτειένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης (future) για την αγορά της ίδιας μετοχής σε χρόνο T. Τα δύο παράγωγα προϊόντα έχουν την ίδια τιμή άσκησης.

   (α) (3 βαθμοί)Να δείξετε ότι η τιμή του δικαιώματος είναι $S_0\left[2N\left(\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right)-1\right]$. Γιατί μια οποιαδήποτε άλλη τιμή δεν θα ήταν σωστή;

   (β) (1 βαθμός)Να δείξετε ότι αν στη λήξη η τιμή της μετοχής ανέβει πάνω από την τιμή άσκησης, ο κάτοχος του συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης θα έχει μεγαλύτερο κέρδος από τον κάτοχο του δικαιώματος.

   (γ) (3 βαθμοί)Να δείξετε ότι αν στη λήξη η τιμή της μετοχής πέσει κάτω από $2S_0e^{rT}N\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right)$, ο κάτοχος του δικαιώματος θα έχει μικρότερη ζημιά από τον κάτοχο του συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης.

   (δ) (3 βαθμοί)Στηριζόμενοιστο ερώτημα (γ),να δείξετε ότι η πιθανότητα στη λήξη ο κάτοχος του δικαιώματος να έχει μικρότερη ζημιά από τον κάτοχο του συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης είναι

$$N\left(\frac{\ln\left[2N\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right)\right]}{\sigma\sqrt{T}}+\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right)$$

2. Για τις τρείς μετοχές Α, Β, Γ, οι οποίες αποτελούν όλη την αγορά, έχουμε τα παρακάτω δεδομένα:

Μετοχή	Αναμενόμενη απόδοση	Κίνδυνος (τυπική απόκλιση)	Ποσοστό συμμετοχής στην αγορά	Συντελεστής συσχέτισης
Α	10%	20%	40%	$\rho_{AB} = 50\%$
Β	-4%	25%	30%	$\rho_{BΓ} = -40\%$
Γ	5%	10%	30%	$\rho_{ΓA} = 20\%$

(α) (1 βαθμός) Να βρείτε τη αναμενόμενη απόδοση και τον κίνδυνο (τυπική απόκλιση) της αγοράς.
(β) (4 βαθμοί) Να βρείτε τις συνδιακυμάνσεις των αποδόσεων κάθε μιας από τις τρείς μετοχές σε σχέση με την απόδοση της αγοράς και στη συνέχεια τα βήτα (beta) των τριών μετοχών.
(γ) (1 βαθμός) Να γράψετε τον πίνακα διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεων C των μετοχών της αγοράς και να επαληθεύσετε ότι ο αντίστροφός του είναι ο

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 44{,}7 & -24{,}7 & -42{,}6 \\ -24{,}7 & 32{,}7 & 42{,}6 \\ -42{,}6 & 42{,}6 & 159{,}6 \end{pmatrix}$$

(δ) (4 βαθμοί) Να βρείτε το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς που μπορεί να δημιουργηθεί από όλες τις μετοχές της αγοράς και να δείξετε ότι το βήτα (beta) του χαρτοφυλακίου ελάχιστης διασποράς είναι 0,295.

3. **(α)** Η μετοχή Α έχει αναμενόμενη απόδοση μ και κίνδυνο (τυπική απόκλιση) σ, ενώ η μετοχή Β έχει αναμενόμενη απόδοση $\frac{\mu}{2}$ και κίνδυνο (τυπική απόκλιση) 2σ. Ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεών τους είναι ρ.

(i) **(4 βαθμοί)** Να δείξετε ότι ο ελάχιστος δυνατός κίνδυνος (τυπική απόκλιση) που αναλαμβάνει επενδυτής που θα καταρτίσει χαρτοφυλάκιο από τις μετοχές Α και Β είναι $2\sigma\sqrt{\frac{1-\rho^2}{5-4\rho}}$.

(ii) **(1 βαθμός)** Ποιοισυντελεστές συσχέτισης εξασφαλίζουν ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο των μετοχών Α και Β και ποια είναι η σύνθεση του ακίνδυνου χαρτοφυλακίου αν η νομοθεσία απαγορεύει τις ανοιχτές πωλήσεις;

(iii) **(2 βαθμοί)** Να δείξετε ότι αν η επιθυμητή απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι μικρότερη από $\frac{\mu}{2}$ ή μεγαλύτερη από μ, θα πρέπει οπωσδήποτε να γίνει ανοιχτή πώληση. Να δείξετε επίσης ότι η μετοχή Α κυριαρχεί (dominates) επί της μετοχής Β. Τι σημαίνει αυτό για έναν επενδυτή;

(β)(3 βαθμοί) Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (calloption)κοστίζει 12,34€. Αμέσως μετά την αγορά ενός δικαιώματος, επενδυτής πληροφορείται για τα ακόλουθα χαρακτηριστικά του:
Δέλτα (Delta)=0,63 , Γάμμα (Gamma)=0,02 , Vega = 0,38 , Θήτα (Theta)=−0,02 , Ρω (Rho)=0,50.
Την επόμενη ημέρα (t = 1/365) έχουμε την εξής εικόνα για τη μετοχή και για την αγορά:
Τιμή μετοχής : $S_{\frac{1}{365}} = S_0 + 3€$.
Πτητικότητα μετοχής : $\sigma_{\frac{1}{365}} = \sigma_0 + 1\%$.
Ακίνδυνη ένταση ανατοκισμού: $r_{\frac{1}{365}} = r_0 + 2\%$.
Ποια είναι η αξία του δικαιώματος στο τέλος της επόμενης ημέρας;

4. Για τη μετοχή S είναι $S_0 = 10$ και θεωρούμε ότι η τιμή της σε κάθε επόμενη χρονική στιγμή καθορίζεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση $dS_t = 15\%dt + 35\%dW_t$, όπου W_t ανέλιξη Wiener.

(α) (1 βαθμός) Για τις τρείς επόμενες χρονικές στιγμές $t = 1, 2, 3$, ποια είναι η κατανομή της ανέλιξης W_t ; Να γραφτεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της W_t για $t = 1, 2, 3$.

(β) (1 βαθμός) Αν τις επόμενες χρονικές στιγμές $t = 1, 2, 3$ η W_t πάρει τις τιμές $W_1 = -0{,}35948$, $W_2 = 0{,}380515$, $W_3 = -0{,}71913$, ποιες θα είναι οι τιμές της μετοχής για $t = 1, 2, 3$;

(γ) (5 βαθμοί) Αν για $t = 1, 2, 3$, οι τιμές της μετοχής που βρήκατε στο ερώτημα (β) απαιτούμε να προέλθουν από μια άλλη αριθμητική κίνηση Brownμε στοχαστική διαφορική εξίσωση $dS_t = 25\%dt + 35\%d\widetilde{W}_t$με $\widetilde{W}_t$ανέλιξη Wiener, ποιες τιμές πρέπει να πάρει η ανέλιξη $\widetilde{W}_t$ για $t = 1, 2, 3$; Ποια είναι η κατανομή της $\widetilde{W}_t$ για $t = 1, 2, 3$; Σε αυτή την περίπτωση να δείξετε ότι η ανέλιξη W_t,για κάθε $t > 0$,ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο $0{,}2857t$και διασπορά t.

(δ) (3 βαθμοί) Αν ονομάσουμε μέτρο **P**την κατανομή της W_t κάτω από την παραδοχή της αριθμητικής κίνησης Brownμε $\mu = 15\%$ και μέτρο **Q**την κατανομή της W_t κάτω από την παραδοχή της αριθμητικής κίνησης Brownμε $\mu = 25\%$, να δείξετε άμεσα, βάσει του θεωρήματος Girsanov, ότι η παράγωγος Radon–Nikodymείναι:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = e^{\mathbf{0{,}2857}\cdot W_t - 0{,}0408\cdot t}$$

5. Μια μετοχή εκτελεί γεωμετρική κίνηση Brown$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$, όπου W_t ανέλιξη Wiener.**(α) (5 βαθμοί)** Να δείξετε ότι ο συντελεστής συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών X_t και X_{t+h}, με $h > 0$ είναι

$$\rho = \frac{e^{\sigma^2 \cdot t} - 1}{\sqrt{\left(e^{\sigma^2 \cdot t} - 1\right)\left(e^{\sigma^2 \cdot (t+h)} - 1\right)}}$$

(β) (5 βαθμοί) Να δείξετε ότι με μηδενικό επιτόκιο, το κεφάλαιο που διακινδυνεύεται με την αγορά μιας μετοχής για χρόνο t, σε επίπεδο εμπιστοσύνης α, συνδέεται με το κεφάλαιο που διακινδυνεύεται με την αγορά μιας μετοχής για χρόνο t+h, h> 0, σε επίπεδο εμπιστοσύνης αμέσω της σχέσης

$$\frac{VaR_{t+h}}{VaR_t} = \frac{1 - e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\cdot(t+h) + \sigma \cdot \sqrt{t+h} \cdot N^{-1}(1-\alpha)}}{1 - e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\cdot t + \sigma \cdot \sqrt{t} \cdot N^{-1}(1-\alpha)}}$$