ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ** **ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:		**Επίθετο:**			
Ημερομηνία:	**24-6-2021**	**Πρωί:**		**Απόγευμα:**	**x**
Θεματική ενότητα: Χρηματοοικονομικά πρότυπα, Κωδ. Αε					

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΕ ΟΛΟΥΣ !!!!!!!!

1. Για τα επιτόκια της αγοράς ισχύει το πρότυπο Vasicek : $dr_t = 30\% \cdot (8{,}5\% - r_t)dt + 10\% dW_t$, όπου W_t ανέλιξη Wienerκαι $r_0 = 2{,}10\%$. Στην αγορά υπάρχει η μετοχή S, η οποία εκτελεί αριθμητική κίνηση Brownμε συντελεστή διεύθυνσης (μ) τον μακροπρόθεσμο μέσο των επιτοκίων, συντελεστή διάχυσης (σ) το συντελεστή διάχυσης του προτύπου Vasicek και αρχική τιμή $S_0 = 6$. Επίσης, σήμερα, συνάπτεται μια συμφωνία (future – συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης) για την πώληση μιας μετοχής Sμετά από 3,5 περιόδους.
(α) (2 βαθμοί) Αν στη λήξη της συμφωνίας η τιμή της μετοχής διαμορφωθεί στην αναμενόμενη τιμή της αυξημένη κατά την τυπική απόκλισή της, ποια θα είναι η τιμή της μετοχής και ποια θα είναι η τιμή της ανέλιξης Wiener $W_{3,5}$;
(β) (4 βαθμοί) Αν η τιμή της μετοχής στη λήξη της συμφωνίας είναι αυτή που περιγράφεται στο ερώτημα (α), ποιο θα είναι το κέρδος ή η ζημιά στη λήξη της συμφωνίας;
(γ) (4 βαθμοί) Ποια είναι η πιθανότητα στη λήξη της συμφωνίας το κέρδος να είναι μεταξύ 0,20 και 0,60 και ποιες τιμές της μετοχής εξασφαλίζουν το κέρδος αυτό;
Δίδονται : $N(1{,}57053) = 0{,}941854$ και $N(0{,}56756) = 0{,}714833$.

2. Η μετοχή Χ ξεκίνησε την 1/1/2014 με τιμή 8,00, ενώ τα τελευταία έτη η τιμή της έκλεισε ως εξής:

31/12/2016	9,974
31/12/2017	10,672
31/12/2018	11,953
31/12/2019	12,909
31/12/2020	14,200

Οι οικονομικοί αναλυτές Α και Β που έχουν αναλάβει να δημιουργήσουν στοχαστικό μοντέλο για την τιμή της μετοχής συμφωνούν ότι η μετοχή εκτελεί αριθμητική κίνηση Brown. Για το συντελεστή κατεύθυνσης ο Α υποστηρίζει ότι είναι η μέση ετήσια μεταβολή της τιμής των τελευταίων 4 ετών, ενώ ο Β υποστηρίζει ότι είναι η μέση ετήσια μεταβολή των τελευταίων 3 ετών. Και οι δύο συμφωνούν ότι ο συντελεστή διάχυσης είναι η τυπική απόκλιση της ετήσιας μεταβολής της τιμής των τελευταίων 4 ετών.

(α) (2 βαθμοί) Να γραφτεί η στοχαστική διαφορική εξίσωση της τιμής της μετοχής σύμφωνα με τις εκτιμήσεις του κάθε αναλυτή και να οριστούν τα μέτρα $\mathbf{P}_A$ και $\mathbf{P}_B$ για τον τυχαίο παράγοντα που την διέπει.

(β) (3 βαθμοί) Να δείξετε ότι η παράγωγος Radon – Nikodym για τα μέτρα $\mathbf{P}_A$ και $\mathbf{P}_B$ είναι:

$$\frac{d\mathbf{P}_B}{d\mathbf{P}_A} = e^{0,390625\cdot W_t - 0,07629\cdot t}$$

(γ) (3 βαθμοί) Αν θεωρήσουμε σωστή την εκτίμηση του αναλυτή Α, να δείξετε ότι η μέση τιμή και η διασπορά της παραγώγου Radon – Nikodym είναι $e^{0,00000\cdot t}$ και $e^{0,152596\cdot t} - e^{0,000008\cdot t}$.

(δ) (2 βαθμοί) Εξακολουθώντας να θεωρούμε σωστή την εκτίμηση του Α, μετά από πόσο χρόνο από τώρα (31/12/2020) η εκτιμώμενη τιμή της μετοχής θα είναι διπλάσια της αρχικής (1/1/2014) τιμής της;

3. Η μετοχή Χ εκτελεί γεωμετρική κίνηση Brownμε παραμέτρους μ και σ, ενώ η αρχική τιμή της είναι X_0. Επενδυτής αγοράζει συνεχώς μετοχές Χ επενδύοντας σε κάθε χρονική στιγμή ποσό X_0. Η ένταση ανατοκισμού είναι δ.

(α) (3 βαθμοί) Αν M_t η στοχαστική ανέλιξη που δείχνει τον αριθμό των μετοχών Χ που αγοράζει ο επενδυτής τη χρονική στιγμή t, να γραφτεί η εξίσωση της M_t συναρτήσει της ανέλιξης Wiener W_t και να δειχτεί ότι
$E(M_t) = e^{-(\mu-\sigma^2)t}$ και $Var(M_t) = \left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)[E(M_t)]^2$

(β) (i) (2 βαθμοί) Αν $\mu > \sigma^2$ να δείξετε ότι ο συνολικός αριθμός των μετοχών που αναμένεται να αγοραστούν είναι $\dfrac{1}{\mu - \sigma^2}$. Ποιός είναι ο αντίστοιχος αριθμός αν $\mu \leq \sigma^2$;

(ii) (1,5 βαθμός) Αν $\mu > \sigma^2$και $X_0 = 1$ να δείξετε ότι το ποσοστό του συνολικού αριθμού των μετοχών που αναμένεται να αγοραστούν μέχρι τη μέση διάρκεια όλων των πληρωμών που θα γίνουν είναι
$1 - e^{-\frac{\mu-\sigma^2}{\delta}}$

(γ) (3,5 βαθμοί) Να δείξετε ότι η πιθανότητα σε μια χρονική στιγμή tνα αγοραστεί αριθμός μετοχών μεγαλύτερος από τον αναμενόμενο είναι
$1 - N\left(\dfrac{\sigma\sqrt{t}}{2}\right)$.

4. **(α)** Οι μετοχές Α,Β,Γ,Δ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και εκτελούν γεωμετρική κίνηση Brownμε τα εξής χαρακτηριστικά:

Μετοχή	μ	σ	Αρχικήτιμή
Α	5,50%	36,00%	42
Β	8,00%	28,00%	10
Γ	17,00%	30,00%	19
Δ	9,00%	35,00%	12

Η ακίνδυνη ένταση ανατοκισμού είναι 7,50%.
Επενδυτής αγοράζει με δάνειο μονοετές ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (call option) επι της μετοχής Α, με τιμή άσκησης 41. Στη λήξη, η τιμή της μετοχής Α είναι 71, και μετά την εξόφληση του δανείου ο επενδυτής δημιουργεί το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς από τις μετοχές Β,Γ και Δ.

(i) **(4 βαθμοί)** Ποιο ποσό επενδύθηκε στη λήξη του δικαιώματος και πως το ποσό αυτό κατανεμήθηκε σε κάθε μια από τις μετοχές Β,Γ,Δ; Αν η τιμή της κάθε μετοχής στη λήξη του δικαιώματος είναι ακριβώς η τιμή που αναμένεται να έχει, από πόσες μετοχές Β,Γ,Δ θα καταρτιστεί το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς;

(ii) **(4 βαθμοί)** Ποια είναι η απόδοση και η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου ελάχιστης διασποράς;

(β) (1 βαθμός) Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (call option) κοστίζει 2,53483. Αμέσως μετά την αγορά του γίνεται θωράκιση (hedging) έναντι του κινδύνου μικρών μεταβολών της τιμής της μετοχής με αγορά 0,5759344 μετοχών και λήψη δανείου 6,104186. Ποια είναι η αρχική τιμή της μετοχής;
(γ) (1 βαθμός) Στο πρότυπο Black – Scholes, αν $d_1 - d_2 = 1$, να δείξετε ότι
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{T}}$
Δίδονται N(0,455271) = 0,675546 και N(0,095271)=0,53795.

5. (α)

(i) **(2 βαθμοί)** Να δείξετε ότι αν ένα χαρτοφυλάκιο P έχει την απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς M, τότε ο συντελεστής συσχέτισής του με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς είναι $\frac{\sigma_M}{\sigma_P}$

(ii) **(2 βαθμοί)** Να δείξετε ότι αν ο συντελεστής συσχέτισης ενός χαρτοφυλακίου P με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς είναι 1, τότε οι δείκτες Sharpeτων δύο χαρτοφυλακίων ταυτίζονται.

(β) (2 βαθμοί) Αν W_tανέλιξη Wiener, να επαληθεύσετε ότι η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$dX_t = (1 + 2\ln X_t)X_t dt + 2X_t\sqrt{\ln X_t}dW_t$έχει ως λύση την ανέλιξη $e^{W_t^2}$.

(γ)Η τιμή μιας μετοχής σήμερα είναι 1 και σε μία περίοδο θα γίνει είτε u (με u> 1) είτε d (με 0 <d < 1).

(i) **(2 βαθμοί)** Να δείξετε ότι αν η τιμή άσκησης ενός μονοετούς ευρωπαϊκού calloptionείναι ο μέσος όρος των τελικών τιμών της μετοχής, τότε το payoffστην άνοδο ταυτίζεται με την τυπική απόκλιση των τελικών τιμών της μετοχής,όταν οι δύο εκβάσεις της τιμής είναι ισοπίθανες. Η αρχική τιμή της μετοχής είναι 1.

(ii) **(2 βαθμοί)** Αν το επιτόκιο είναι i , να δείξετε ότι η non arbitrage αξία του δικαιώματος του ερωτήματος (i)είναι ανεξάρτητη του u.