ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:	**Επίθετο:**				
Ημερομηνία:29 Ιανουαρίου 2020	**Πρωί:**	**Χ**		**Απόγευμα:**	
Θεματική ενότητα: Αναλογιστικά Πρότυπα Επιβίωσης					

Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α!!!!!!!

Ερώτηση 1.

Σε μία μελέτη δύο αιτίων εξόδου, θανάτου και αποχώρησης, εξετάζουμε 50 άτομα. Όλα τα άτομα εισέρχονται στην μελέτη σε ηλικία 55 και είναι προγραμματισμένο να αποχωρήσουν σε ηλικία 56. Κατά την διάρκεια της παρατήρησης 6 άτομα αποβιώνουν και 15 αποχωρούν ακριβώς στο μέσο του διαστήματος. Εάν τα αίτια εξόδου είναι ανεξάρτητα και υποθέτουμε ομοιόμορφη κατανομή για τους συναφείς πίνακες για κάθε αίτιο εξόδου, να εκτιμήσετε την ανεξάρτητη πιθανότητα θανάτου $q_{55}^{'(d)}$ σύμφωνα με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας.

(Α) 0,1288 (Β) 0,1305 (Γ) 0,1331 (Δ) 0,1431 (Ε) 0,1577

Ερώτηση2.

Εάν η θνησιμότητα ακολουθεί τον νόμο Gompertz, δηλαδή $\mu_x = B \cdot C^x$, $B > 0$, $C > 1$ και γνωρίζετε ότι :

- $\Delta \ln \mu_x = 0,02$ για $x = 0,1,2,...$
- $q_{35} = 0,01$

Να βρείτε το B.

(Α) 0,0034 (Β) 0,0039 (Γ) 0,0044 (Δ) 0,0049 (Ε) 0,0054

Ερώτηση3.

Η διάρκεια μιας μηχανής ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, δηλαδή $T \sim Exp(\lambda)$ με $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. Παρατηρούμε 10 καινούριες μηχανές και καταγράφουμε τον χρόνο αστοχίας κάθε μίας από αυτές. Εάν η παρατήρηση διακόπτεται μετά από 5 περιόδους και μέχρι εκείνη την στιγμή έχουν αστοχήσει 4 συσκευές με τους παρακάτω χρόνους αστοχίας:

2 2 4 5

να εκτιμηθεί η τιμή της παραμέτρου λ σύμφωνα με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας.

(Α) $0,1$ (Β) $\frac{4}{43}$ (Γ) $0,08$ (Δ) $\frac{4}{53}$ (Ε) $0,06$

Ερώτηση 4.

Θεωρούμε ότι οι τ.μ. T_1, T_2, T_3 είναι ανεξάρτητες και κανονικά κατανεμημένες με διάνυσμα μέσων τιμών $m' = [3 \quad 5 \quad 7]$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Από την εκτέλεση του πειράματος προέκυψαν οι εκτιμήσεις $u' = [2 \quad 6 \quad 8]$. Αν η κατανομή της τ.μ. U/T είναι μία πολυδιάστατη κανονική με διάνυσμα μέσων τιμών $T = (T_1, T_2, T_3)$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων $B = \frac{1}{2}A$, χρησιμοποιώντας την μέθοδο Kimeldorf-Jones να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{i=1}^{3} v_i$ όπου v το διάνυσμα των μέσων τιμών της αναθεωρημένης κατανομής T/U.

(Α) $\frac{37}{3}$ (Β) 13 (Γ) $\frac{43}{3}$ (Δ) $\frac{47}{3}$ (Ε) 17

Ερώτηση5.

Σε μία πόλη σε διάστημα 10 ετών έχει παρατηρηθεί ότι βρέχει το 1/3 των ημερών. Ένα δελτίο πρόγνωσης καιρού προσπαθεί να προβλέψει αν θα βρέξει ή όχι την επόμενη ημέρα. Τα 3/4 των ημερών με βροχή καθώς και τα 3/5 των ημερών με ηλιοφάνεια προβλέφθηκαν επιτυχώς από το δελτίο καιρού. Αν το σημερινό δελτίο καιρού προβλέπει για αύριο βροχή, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα βρέξει?

(Α) 0,4839 (Β) 0,5124 (Γ) 0,5527 (Δ) 0,7500 (Ε) 0,8263

Ερώτηση 6.

Δίνεται ότι η ένταση θνησιμότητας για ένα άτομο ηλικίας 65 ετών περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\mu_{65+t} = \begin{cases} 0,1 & \text{αν } t \in [0,3) \\ 0,2 & \text{αν } t \in [3,5) \\ 0,3 & \text{αν } t \in [5,+\infty) \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής του ατόμου αυτού.

(Α) 5,07 (Β) 5,17 (Γ) 5,27 (Δ) 5,37 (Ε) 5,47

Ερώτηση 7.

Δίνεται ότι $X \sim Exp(0,1)$ και ότι $E(X) = 10$. Θεωρούμε επιπλέον την τ.μ. $Y = 3X^2 + 2X + 5$. Αν E_1 η μέση τιμή της τ.μ. Y και E_2 η μέση τιμή της τ.μ. Y όπως αυτή υπολογίζεται προσεγγιστικά κάνοντας χρήση του αναπτύγματος Taylor, να βρεθεί το $E_1 - E_2$.

(Υπενθύμιση: Το ανάπτυγμα Taylor μίας συνάρτησης $f \in C^\infty$ γύρω από το x_0, δίνεται από την σχέση: $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}(x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}(x - x_0)^3 f'''(x_0) + \ldots$)

(Α) -0,02 (Β) -0,01 (Γ) 0,00 (Δ) 0,01 (Ε) 0,02

Ερώτηση 8.

Έχουμε ένα πίνακα θνησιμότητας με μοναδικό αίτιο εξόδου τον θάνατο. Αν δίνεται ότι $q_{36} = 0,2$ και ισχύει η υπόθεση Balducci να βρείτε το ${}_{0,5}q_{36,2}$.

(Α) 0,0873 (Β) 0,0957 (Γ) 0,1064 (Δ) 0,1132 (Ε) 0,1225

Ερώτηση 9.

Εάν $e_{61} = 30$, $e_{63} = 29$ και ${}_2p_{61} = 0,9672131147$ να βρεθεί το e_{62}. Υπενθυμίζεται ότι με e_x συμβολίζεται ο ακέραιος υπολειπόμενος χρόνος ατόμου ηλικίας x.

(Α) 29,2 (Β) 29,3 (Γ) 29,4 (Δ) 29,5 (Ε) 29,6

Ερώτηση10.

Θεωρούμε τις αρχικές εκτιμήσεις $u_0 = 2,\ u_1 = 5,\ u_2 = 3,\ u_3 = 7$ στα σημεία $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$. Εφαρμόζοντας την μέθοδο Least-Squares Cubic Spline στο διάστημα $[0,3]$ αναζητούμε πολυώνυμο τρίτου βαθμού $p(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$ τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η παρακάτω ποσότητα:

$$SS = \sum_{i=0}^{3} w_i \cdot \left(u_i - p(x_i)\right)^2$$

Εν συνεχεία βρίσκουμε τις αναθεωρημένες εκτιμήσεις από την σχέση $v_i = p(x_i)$ για $i = 0,1,2,3$. Αν θεωρήσουμε ότι $w_i = 1$ για κάθε $i = 0,1,2,3$ να βρεθεί το άθροισμα $\sum_{i=0}^{3} v_i$.

(Α) 12,25 (Β) 13,50 (Γ) 14,80 (Δ) 16,35 (Ε) 17,00

Ερώτηση 11.

Θεωρούμε το παρακάτω συμμετρικό τύπο κινούμενου σταθμισμένου μέσου:

$$v_x = \sum_{r=-2}^{2} a_r \cdot u_{x+r}$$

Με βάση την πληροφορία που αποτυπώνεται στον παρακάτω πίνακα να βρείτε το βάρος $1/R_0^2$ του τύπου.

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
u_x	2	3	4	4	3	-5	-4	8	4	5
v_x			3,35	1,60	2,20	-0,40	-1,35	5,60		

(Α) 0,595 (Β) 0,635 (Γ) 0,985 (Δ) 1,225 (Ε) 1,575

Ερώτηση 12.

Εάν η θνησιμότητα ακολουθεί τον νόμο Makeham, δηλαδή $\mu_x = A + B \cdot C^x$, $B > 0$, $C > 1$, $A \geq -B$ και γνωρίζετε ότι :

- $p_x = 0,6550755421$
- $p_{x+10} = 0,6238523809$
- $p_{x+20} = 0,5877972045$

Να βρείτε το C.

(Α) 1,010 (Β) 1,015 (Γ) 1,020 (Δ) 1,025 (Ε) 1,030

Ερώτηση13.

Σε έναν πίνακα με δύο αίτια εξόδου δίνεται ότι ${}_{1/5}q_x^{(T)} = 0,88$ και ότι ${}_{1/5}q_x^{'(1)} = 2 \cdot {}_{1/5}q_x^{'(2)}$. Να βρεθεί το ${}_{1/5}p_x^{'(1)}$.

(Α) 0,10 (Β) 0,15 (Γ) 0,20 (Δ) 0,25 (Ε) 0,30

Ερώτηση 14.

Για τα σημεία $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ και (x_2, y_2) θεωρούμε την Natural Cubic Spline η οποία δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) = -x^3 + 16x - 21, & x_0 \leq x \leq x_1 \\ f_1(x) = x^3 - 12x^2 + 40x - 37, & x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τον δείκτη ομαλότητας της f.

(Υπενθύμιση: Ο δείκτης ομαλότητας στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ορίζεται ως $S = \int_{\alpha}^{\beta} (f''(x))^2 \, dx$)

(Α) 177 (Β) 192 (Γ) 215 (Δ) 255 (Ε) 289

Ερώτηση 15.

Έχουμε τις αρχικές εκτιμήσεις $u^T = [0,5 \;\; 1 \;\; 2]$ και τις αναθεωρούμε χρησιμοποιώντας την μέθοδο Whittaker ελαχιστοποιώντας μία παράσταση της μορφής:

$$M = \sum_{x=1}^{3} (v_x - u_x)^2 + 3 \cdot \sum_{x=1}^{2} (\Delta v_x)^2$$

Να βρεθεί το v_2, όπου v_x οι αναθεωρημένες τιμές.

(Α) 0,95 (Β) 1,05 (Γ) 1,15 (Δ) 1,25 (Ε) 1,35

Ερώτηση16.

Σε μία μελέτη με μοναδικό αίτιο εξόδου τον θάνατο εισέρχονται 2500 άτομα ηλικίας 30 με προγραμματισμένη ηλικία αποχώρησης 31 και επίσης εισέρχονται 1980 άτομα ηλικίας 30,25 με προγραμματισμένη ηλικία αποχώρησης 31,5. Να εκτιμηθεί το q_{30} με την μέθοδο των ροπών αν ο αριθμός των θανάτων στο ηλικιακό διάστημα $(30,31]$ είναι $d_{30} = 70$ και επίσης ισχύει η σχέση ${}_s q_{30} = \sqrt{s} \cdot q_{30}$ για κάθε $s \in [0,1]$.

(Α) 0,0154 (Β) 0,0176 (Γ) 0,0180 (Δ) 0,0193 (Ε) 0,0200

Ερώτηση17.

Με την βοήθεια των δεδομένων που παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα να εκτιμήσετε την ανεξάρτητη πιθανότητα θανάτου ($q_{35}^{'(d)}$) ενός ατόμου ηλικίας 35 ετών σύμφωνα με την μέθοδο Kaplan-Meier (Product Limit Estimator)

Μέλος	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Ηλικία Εισόδου	32,5	33	33	34,5	35	35	35,2	35,7	35,7	36,5
Προγραμματισμένη Ηλικία Εξόδου	45	35	38	42	39	45	43	45	50	52
Ηλικία Θανάτου	-	-	34,5	-	-	35,1	-	-	35,8	-
Ηλικία Αποχώρησης	-	-	-	35	-	-	35,5	-	-	-

(Α) 0,2 (Β) 0,3 (Γ) 0,4 (Δ) 0,5 (Ε) 0,6

Ερώτηση18.

Θεωρούμε δύο ανεξάρτητες τ.μ. T_1, T_2 οι οποίες περιγράφουν τον χρόνο ζωής δύο ατόμων. Αν και οι δύο ακολουθούν εκθετική κατανομή και ισχύει $E(T_1)=2E(T_2)$ να βρείτε την πιθανότητα το πρώτο άτομο (που αντιστοιχεί στην τ.μ. T_1) να ζήσει περισσότερο από το δεύτερο άτομο (που αντιστοιχεί στην τ.μ. T_2).

(Α) $\frac{1}{3}$ (Β) $\frac{2}{4}$ (Γ) $\frac{3}{5}$ (Δ) $\frac{4}{6}$ (Ε) $\frac{5}{7}$

Ερώτηση19.

Θεωρούμε τις τ.μ. T_i για $i=1,2,...100$ οι οποίες εκφράζουν την πιθανότητα ένας άνθρωπος να πεθάνει στο διάστημα $(i-1,i]$ αντίστοιχα. Η από κοινού κατανομή των τ.μ. T_i θεωρούμε ότι είναι μια Dirichlet κατανομή με παραμέτρους $a_i, i=1,2,...100$, δηλαδή:

$$f_T(t_1,t_2,...,t_{100})=\frac{\Gamma(a)}{\prod_{i=1}^{100}\Gamma(a_i)}\prod_{i=1}^{100}t_i^{a_i-1} \text{ όπου } a=\sum_{i=1}^{100}a_i\,,\ \sum_{i=1}^{100}t_i=1 \text{ και } a_i>0,\ t_i\in[0,1] \text{ για κάθε } i=1,2,...100$$

Από την μελέτη ενός πληθυσμού όπου όλα τα άτομα αποβίωσαν στο διάστημα $(0,100]$, αναθεωρήσαμε την αρχική μας εκτίμηση αναφορικά με την κατανομή της $T=(T_1,T_2,...,T_{100})$ και προέκυψε η αναθεωρημένη τ.μ. $T'=(T_1',T_2',...,T_{100}')$, αν γνωρίζετε ότι $E(T_i')=i\cdot E(T_1')$ για κάθε $i=1,2,...100$, να βρείτε την $E(T_1')$.

(Α) $1,98\cdot10^{-4}$ (Β) $2,12\cdot10^{-4}$ (Γ) $2,25\cdot10^{-4}$ (Δ) $2,73\cdot10^{-4}$ (Ε) $3,09\cdot10^{-4}$

Ερώτηση 20.

Θεωρούμε ότι τα σημεία $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,3)$ και $(4,11)$ ορίζουν μία Interpolation Cubic Spline στο διάστημα $[0,3]$ που ορίζεται από τρία τόξα (πολυώνυμα 3ου βαθμού). Αναλυτικότερα η Interpolation Cubic Spline έχει την μορφή:

$$f(x)=\begin{cases} f_0(x)=x^3-5x^2+3x+2, & 0\le x\le 1 \\ f_1(x), & 1\le x\le 2 \\ f_2(x), & 2\le x\le 4 \end{cases}$$

Να βρεθεί το $f(3)$.

(Α) 5 (Β) 8 (Γ) 10 (Δ)17 (Ε) 27

Ερώτηση 21.

Θεωρούμε ένα δείγμα από 10 πειραματόζωα τα οποία πεθαίνουν στους παρακάτω χρόνους:

1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5

Εκτιμούμε ότι η συνάρτηση επιβίωσης είναι η $S(t)=\begin{cases} 1, & t\le 0 \\ 1-\frac{t}{5}, & 0<t<5 \\ 0, & t\ge 5 \end{cases}$, να υπολογίσετε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης D_n όπως αυτή ορίζεται σύμφωνα με το Kolmogorov-Smirnov έλεγχο υποθέσεων.

(Α) 0,10 (Β) 0,15 (Γ) 0,20 (Δ)0,25 (Ε) 0,30

Ερώτηση 22.

Για έναν κλειστό πληθυσμό μιας ομάδας ατόμων που παρακολουθείται από την γέννησή της δίνεται ότι ο αριθμός των ζώντων ατόμων ηλικίας x εκφράζεται από την συνάρτηση:

$$l_x=10000\cdot\left(1-\frac{200x}{x^2+10000}\right),\ x\in[0,100]$$

Να υπολογίσετε, το ${}_{30}m_{70}$, δηλαδή τον κεντρικό ρυθμό θνησιμότητας στο ηλικιακό διάστημα $[70,100]$.

(Α) 0,1073 (Β) 0,1095 (Γ) 0,1107 (Δ)0,1119 (Ε) 0,1128

Ερώτηση 23.

Θεωρούμε ότι η ένταση θνησιμότητας μ είναι σταθερή με $\mu > 0$ και γνωρίζουμε ότι, για δύο άτομα ηλικίας x με ανεξάρτητες ζωές, η πιθανότητα ο ένας να αποβιώσει σε ηλικία x και ο άλλος σε ηλικία $x+1$ ισούται με το $1/4$ της πιθανότητας ένα άτομο ηλικίας x να αποβιώσει σε ηλικία $x+2$. Να βρείτε την ένταση θνησιμότητας.

(Α) 0,1178 (Β) 0,1476 (Γ) 0,1852 (Δ)0,2231 (Ε) 0,2567

Ερώτηση 24.

Θεωρούμε τον αριθμό X των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε ένα έτος σε μία περιοχή της Ελλάδας. Δίνεται ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κάποια κατανομή Poisson με παράμετρο λ η οποία είναι η πραγματοποίηση κάποιας άλλης τυχαίας μεταβλητής Λ, δηλαδή:

$$X/_{\Lambda=\lambda} \sim Poisson(\lambda) \text{ και } f_{X/\Lambda}(x,\lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \text{ για } x = 0,1,2,3,...$$

Αν για την τυχαία μεταβλητή Λ δίνεται ότι $\Lambda \sim Gamma(30,5)$ με μέση τιμή $E(\Lambda) = 6$ και γνωρίζουμε ότι την τελευταία πενταετία σημειώθηκαν συνολικά 53 ατυχήματα, να υπολογίσετε την αναθεωρημένη μέση τιμή της Λ.

(Α) 7,5 (Β) 8,3 (Γ) 10,6 (Δ) 12,1 (Ε) 13,5