Αναλογιστικά Πρότυπα Επιβίωσης
Απόγευμα 2015

Θέμα 1

Α) Μια έρευνα θνησιμότητας ασφαλισμένου πληθυσμού πραγματοποιήθηκε για μια μεγάλη ασφαλιστική εταιρεία ζωής. Οι πρωτογενείς τιμές θνησιμότητας εξομαλύνθηκαν χρησιμοποιώντας παραμετρική εξομάλυνση με 3 παραμέτρους και ένα μέρος των αποτελεσμάτων παρουσιάζεται παρακάτω

Ηλικία	**Πλήθος ατόμων**	**Πρωτογενής θνησιμότητα**	**Εξομαλυμένη θνησιμότητα**
40	5500	0,00319	0,00383
41	6000	0,00366	0,00394
42	5800	0,00330	0,00405
43	4800	0,00330	0,00417
44	4200	0,00351	0,00430
45	5300	0,00470	0,00442
46	3700	0,00519	0,00457
47	6000	0,00439	0,00471
48	7000	0,00447	0,00485
49	5700	0,00413	0,00501

Ποια είναι η μηδενική υπόθεση;

Ελέγξτε αν η εξομάλυνση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5% (ή αντίστοιχα σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%) εφαρμόζοντας τους ακόλουθους ελέγχους:

α) Έλεγχος X^2

β) Έλεγχος προσήμων

Δίνονται:

Κρίσιμες τιμές $\chi^2_{a;n}$ της κατανομής X^2 $[P(X \geq X^2_{1-\alpha;k}) = a\}$

n	$\chi^2_{0,975;n}$	$\chi^2_{0,95;n}$	$\chi^2_{0,05;n}$	$\chi^2_{0,025;n}$
5	0,831	1,145	11,070	12,832
6	1,237	1,635	12,592	14,449
7	1,690	2,167	14,067	16,013
8	2,180	2,733	15,507	17,535
9	2,700	3,325	16,919	19,023
10	3,247	3,940	18,307	20,483

και

Bi(10, 0,5)	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	F(k)	0,0010	0,0107	0,0547	0,1719	0,3770	0,6230	0,8281	0,9453	0,9893	0,9990	1,0000

(5 μονάδες)

Β) Σε μια εξομάλυνση Whittaker η οποία εφαρμόσθηκε στα στοιχεία $u_x, x = 1,2,3,4$ με z=2 και με βάρη w_x παρήχθησαν οι εξής τιμές $v_1 = 1, v_2 = 3, v_3 = 2,\ v_4 = -4$.

Σε μια άλλη εξομάλυνση Whittaker η οποία εφαρμόσθηκε στα ίδια στοιχεία u_x και χρησιμοποιήθηκαν ως βάρη τα $w'_x = w_x + 1$ και για h΄=h+1 παρήχθησαν οι ίδιες τιμές $v'_x = v_x,\ x = 1,2,3,4$. Να υπολογισθεί το u_2. (5 μονάδες)

Θέμα 2

A) Το πλήθος των θανάτων k σε μια ομάδα 1000 ατόμων ακολουθεί κατανομή Poisson σ.π.π. $f(k) = e^{-\lambda}\lambda^{\kappa} / k!$ όπου η παράμετρος λ έχει σ.π.π. $p(\lambda) = \lambda e^{-\lambda},\ \lambda > 0$. Σε n διαφορετικές ομάδες 1000 ατόμων καταγράφηκαν $x_1,\ x_2, \ldots\ x_n$ θάνατοι αντίστοιχα. Να υπολογισθεί η ύστερη κατανομή της παραμέτρου λ καθώς και το $\hat{\lambda}$ με τη μέθοδο Bayes. (5 μονάδες)

B) Έστω P η αναλογία μελών ενός πληθυσμού που έχουν ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό. Υποθέτουμε ότι η εκ των προτέρων κατανομή της P~Beta (2,1) (X~Beta (α, β) εάν $f(x|\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, 0 < x < 1$).

20 άτομα επιλέγονται τυχαία από τον πληθυσμό αυτό και έστω ότι Y από τα 20 άτομα έχουν το χαρακτηριστικό αυτό. Να υπολογίσετε την $\Pr(Y = 9|P = 0{,}7)$ και την $\Pr(Y = 9)$.

(5 μονάδες)

Θέμα 3

Δίνεται ότι $l_{90} = 26557,\ l_{91} = 22409,\ l_{98} = 3582,\ l_{99} = 2501$ και χρησιμοποιούμε τον τύπο Gompertz για να υπολογίσουμε τις τιμές lx με $x \geq 100$.

A) Να προσδιορίσετε τις παραμέτρους της συνάρτησης $f(x) = \ln(-\ln(p_x))$ (5 μονάδες)

B) Να υπολογίσετε την ηλικία ω που αντιστοιχεί σε $l_\omega > 0{,}5$ και $l_{\omega+1} < 0{,}5$ (5 μονάδες)

Θέμα 4

Α) Έστω $T_1, \ T_2, ..., \ T_m$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση αναλογίας κινδύνου $k_1 t^n, \quad k_m t^n$ αντίστοιχα (Weibull). Να βρείτε την κατανομή της $Y = \min(T_1, ..., \ T_m)$ (5 μονάδες)

Β) Μια άνωθεν περικομμένη (truncated) εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και μέγιστη ηλικία ω έχει πυκνότητα ανάλογη με λexp(-λt) στο [0,ω] και 0 αλλού. Να υπολογίσετε την συνάρτηση αναλογίας κινδύνου της κατανομής. (5 μονάδες)

Θέμα 5

Α) Εάν η συνάρτηση επιβίωσης $S_\theta(x) = \dfrac{1}{(1+x)^\theta}, x \geq 0, \ \theta > 1$ να υπολογίσετε την $E_\theta(X \mid X \geq x)$

(5 μονάδες)

Β) Παρατηρούμε ένα δείγμα μεγέθους n που ακολουθεί την $S_\theta(x) = \dfrac{1}{(1+x)^\theta}, x \geq 0, \ \theta > 1$ στο διάστημα [0, c] με c>0 γνωστό και καταγράφουμε r θανάτους. Να υπολογίσετε την εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας της θ. (5 μονάδες)