ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ
ΙΟΥΛΙΟΥ 2011

ΣΥΜΒΑΝΤΑ ΖΩΗΣ ΚΑΙ ΘΑΝΑΤΟΥ

14 ΙΟΥΛΙΟΥ 2011

ΑΠΟΓΕΥΜΑΤΙΝΗ ΕΞΕΤΑΣΗ (1 μ.μ. – 3 μ.μ.)

1. (4 μονάδες) (i) Να υπολογιστεί το ${}_{1,75}p_{45,5}$ υπό την υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής των θανάτων σε κάθε έτος ηλικίας. Δίνονται: $q_{45} = 0{,}001465$, $q_{46} = 0{,}001622$ και $q_{47} = 0{,}001802$

   (ii) Δίνεται $\mu_x = 0{,}015$ για κάθε x. Να υπολογιστεί:

   α. Η πιθανότητα μία ζωή ηλικίας 20 να πεθάνει πριν την ηλικία των 22,50

   β. Να υπολογιστεί το e_{20}

   (iii) Να περιγραφεί τι συμβολίζει η ράντα ζωής $\ddot{a}^{(12)}_{60:50:\overline{20}|}$ και κατόπιν να υπολογιστεί. Δίνεται: $\ddot{a}_{60:50} = 15{,}161$, $\ddot{a}_{80:70} = 6{,}876$, i = 4%, $l_{50} = 9.952{,}697$, $l_{60} = 9.826{,}131$, $l_{70} = 9.392{,}621$ και $l_{80} = 6.953{,}536$

2. (6 μονάδες) Μία ασφαλιστική εταιρία ζωής εκδίδει ένα ασφαλιστικό πρόγραμμα το οποίο προβλέπει την καταβολή ετήσιας σύνταξης 20.000 € σε μία γυναίκα σημερινής ηλικίας 60. Οι καταβολές θα γίνονται μηνιαίως και η 1η καταβολή θα γίνει στο τέλος του μήνα εντός του οποίου θα πεθάνει ο σύζυγος της, σημερινής ηλικίας 65. Τα ασφάλιστρα θα προκαταβάλλονται μηνιαίως. Δίνονται: i = 4%, $a_{60} = 15{,}652$ (ράντα για γυναίκα ηλικίας 60), $a_{65:60} = 11{,}682$ (ράντα για άνδρα ηλικία 65 και γυναίκα ηλικίας 60), Έξοδα επί του εμπορικού ασφαλίστρου: 5% και Έξοδα επί της μηνιαίας σύνταξης: 1.5%. Να υπολογιστεί το μηνιαίο εμπορικό ασφάλιστρο με την υπόθεση ότι η συνάρτηση μετατροπής D_x είναι γραμμική σε κάθε έτος ηλικίας.

3. (8 μονάδες)

   (i) Να δειχτεί ότι για μία ισόβια ασφάλιση ισχύει $P_x = \left(u * {}_{t+1}V_x - {}_tV_x\right) + u * q_{x+t} * (1 - {}_{t+1}V_x)$ και να δοθεί ερμηνεία της ανωτέρω σχέσης (Η απόδειξη να ξεκινήσει από την σχέση ${}_tV_x = A_{x+t} - P_x * \ddot{a}_{x+t}$).

   (ii) Να δειχτεί ότι για μία ασφάλιση με ασφάλιστρα π_k, k = 0, 1, 2, … που καταβάλλονται στην αρχή κάθε έτους και κεφάλαιο θανάτου b_{k+1}, k = 0, 1, 2, … πληρωτέο στο τέλος του έτους του θανάτου ισχύει

   $${}_nV = \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k * (1+i)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} u * q_{x+k} * (b_{k+1} - {}_{k+1}V) * (1+i)^{n-k}$$

   (iii) Για μία μικτή ασφάλιση διάρκειας 10 ετών με κεφάλαιο επιβίωσης ίσο με 1 νομισματική μονάδα συν επιστροφή του 50% των καταβληθέντων ασφαλίστρων εντόκως με επιτόκιο i και κεφάλαιο θανάτου ίσο με 1 νομισματική μονάδα συν το μαθηματικό απόθεμα στο τέλος του έτους θανάτου ζητείται να υπολογιστεί το καθαρό ετήσιο ασφάλιστρο. Δίνεται i = 5% και $\sum_{k=0}^{9} u^k * q_{x+k} = 0{,}2067$

4. (6 μονάδες) Έστω τυχαία μεταβλητή X που αντιπροσωπεύει την παρούσα αξία των παροχών για μία ισόβια ασφάλιση και τυχαία μεταβλητή Y που αντιπροσωπεύει την παρούσα αξία των παροχών για μία πρόσκαιρη ασφάλιση διάρκειας n ετών. Και οι 2 ασφαλίσεις έχουν κεφάλαιο κάλυψης ίσο με 1 νομισματική μονάδα πληρωτέο στο τέλος του έτους του θανάτου και εκδίδονται σε ένα άτομο ηλικίας x.
   (i) Να περιγραφεί η παροχή που προσφέρεται από ένα ασφαλιστικό πρόγραμμα που αντιπροσωπεύεται από την τυχαία μεταβλητή X – Y.
   (ii) Να δείξετε ότι $Cov(X,Y) = {}^2A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} - A_x * A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$
   (iii) Να δείξετε ότι $Var(X-Y) = {}^2A_x - ({}_{n/}A_x)^2 - {}^2A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$

5. (10 μονάδες) Σε μία μικτή ασφάλιση διάρκειας 3 ετών σε άτομο ηλικίας x με κεφάλαιο 1.000 € ισχύουν:
i = 3%, $q_x = 0{,}1$ για κάθε x, Έξοδα 1ου έτους: 20 € + 40% επί του εμπορικού ασφαλίστρου και Έξοδα επόμενων ετών: 5 € + 3% επί του εμπορικού ασφαλίστρου.
(i) Να υπολογιστεί το ετήσιο καθαρό ασφάλιστρο και το ετήσιο εμπορικό ασφάλιστρο χρησιμοποιώντας την αρχή της ισοδυναμίας.
(ii) Να υπολογιστούν τα άρτια μαθηματικά αποθέματα, τα αποθέματα εξόδων (expense reserves) και τα συνολικά αποθέματα στο τέλος κάθε έτους ασφάλισης.
(iii) Δίνονται:
- Υπάρχουν 10 ασφαλισμένοι στο πρόγραμμα ηλικίας x στην έναρξη της ασφάλισης
- Οι θάνατοι και οι εξαγορές συμβαίνουν στο τέλος του έτους
- Η αξία εξαγοράς στο τέλος του 1ου και 2ου έτους είναι ίση με το 90% του συνολικού αποθέματος
- Ισχύει ο παρακάτω double decrement πίνακας ((1) θάνατος; (2) εξαγορά):

K	$q_{x+k}^{(1)}$	$q_{x+k}^{(2)}$
0	0,08	0,40
1	0,08	0,20
2	0,08	0,00

Ζητείται:
α. Να υπολογιστεί η τιμή του αρχικού πλεονάσματος που απαιτείται έτσι ώστε το πλεόνασμα στο τέλος του 1ου έτους να είναι μηδέν (Ως ασφαλιστική υποχρέωση στο τέλος κάθε έτους να ληφθεί το άρτιο μαθηματικό απόθεμα)
β. Να καταρτιστεί ο λογαριασμός εσόδων – εξόδων για τα πρώτα 3 έτη υποθέτοντας ότι το αρχικό πλεόνασμα είναι ίσο με 1.000 € και ότι ως ασφαλιστικές υποχρεώσεις λαμβάνονται τα άρτια μαθηματικά αποθέματα.

6. (6 μονάδες) Σε μία ισόβια ασφάλιση εφαρμόζονται τροποποιημένα καθαρά ασφάλιστρα $P_x(t) = (a + \frac{t}{100}) * P_x$, t =0, 1, 2, …και α θετική σταθερά.

   (i) Αν $(Ia)_x = 10 * \ddot{a}_x$ ποια θα είναι η τιμή του α;

   (ii) Να γραφεί προοπτικός τύπος για το τροποποιημένο μαθηματικό απόθεμα ${}_tV_x^{\text{mod}}$ και να τεθεί στην μορφή ${}_tV_x^{\text{mod}} = {}_tV_x - p(x,t) * (1 - {}_tV_x)$. Να καταγράψετε την κατάλληλη συνάρτηση για το $p(x,t)$.

   (iii) Εάν σε κάποια διάρκεια r είναι ${}_rV_x - {}_rV_x^{\text{mod}} = (\frac{1}{100}) * P_x * (Ia)_{x+r}$, να βρεθεί το r

   (iv) Εάν σε κάποια διάρκεια s τα ${}_sV_x^{\text{mod}}$ και ${}_sV_x$ είναι ίσα, ποια συνθήκη ικανοποιεί το s;

7. (10 μονάδες) Μία ασφαλιστική εταιρία ζωής εκδίδει συμβόλαιο unit – linked διάρκειας 3 ετών σε έναν άνδρα ηλικίας 40. Τα ασφάλιστρα είναι σταθερά ύψους 1.000 € για όλη την διάρκεια του συμβολαίου και προπληρώνονται στην αρχή κάθε έτους. Το ασφάλιστρο του 1ου έτους επενδύεται κατά 70% ενώ του 2ου και του 3ου έτους κατά 100%. Το bid – offer spread είναι ίσο με 5% ενώ το ετήσιο διαχειριστικό έξοδο (annual management charge) είναι ίσο με 1% επί της Αξίας Λογαριασμού. Διευκρινίζεται ότι το ετήσιο διαχειριστικό έξοδο αφαιρείται από τον Λογαριασμό στο τέλος του έτους. Το κεφάλαιο θανάτου ισούται με 10.000 €. Σε περίπτωση θανάτου καταβάλλεται στους δικαιούχους το μεγαλύτερο από το κεφάλαιο θανάτου ή την αξία λογαριασμού. Δίνονται επίσης οι εξής υποθέσεις:

Ποσοστό Ετήσιας Αύξησης Αξίας Λογαριασμού	6%
Ετήσια Απόδοση για τις εκτός Αξίας Λογαριασμού χρηματοροές (non – unit linked cash flows)	4%
qx για κάθε x	1%
Έξοδα 1ου έτους	30 € + 10% επί του ασφαλίστρου
Έξοδα επόμενων ετών	10 € + 2% επί του ασφαλίστρου
Επιτόκιο προεξόφλησης (discount rate)	6%
Πληθωρισμός Εξόδων (inflation rate)	2%

Ζητείται:

(i) Να υπολογιστεί το profit margin.

(ii) Υποθέτοντας ότι η ασφαλιστική εταιρία επιλέγει να μηδενίσει τις μελλοντικές αρνητικές χρηματοροές (zeroise future negative cashflows) να σχηματίσετε τα κατάλληλα αποθέματα, τις χρονικές στιγμές που αυτό απαιτείται .