ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΣΥΜΒΑΝΤΩΝ ΖΩΗΣ & ΘΑΝΑΤΟΥ** **15 Ιουλίου 2016**	**F3W2.PR09**

Όνομα:	**Επίθετο:**			
Ημερομηνία:	**Πρωί:**		**Απόγευμα:**	**Χ**
Θεματική ενότητα:				

1. **Α.** Με επιτόκιο i=3,5% και πίνακα θνησιμότητας με q_{108}=1, υπολογίστε το $A^{(4)}_{108}$ και το $A^{(4)}_{108+\frac{1}{4}}$, χρησιμοποιώντας την υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής των θανάτων (UDD). (8 μονάδες)

   Β. Με βάση την αρχή της ισοδυναμίας, υπολογίστε το μηνιαίο εμπορικό ασφάλιστρο για μία πρόσκαιρη ασφάλιση θανάτου διάρκειας 10 ετών, σε άτομο ηλικίας 55, με ασφαλισμένο κεφάλαιο 50.000 πληρωτέο άμεσα, κατά τη χρονική στιγμή του θανάτου του ασφαλισμένου. Δίνεται:

   i. Έξοδα 1ου έτους: 500 + 10% επί του κάθε μηνιαίου εμπορικού ασφαλίστρου του 1ου έτους.
   ii. Έξοδα επόμενων ετών: 1% επί του κάθε μηνιαίου εμπορικού ασφαλίστρου.
   iii. $\ddot{a}^{(12)}_{55:\overline{10|}} = 7{,}8341$, $\ddot{a}^{(12)}_{55:\overline{1|}} = 0{,}9773$, $\overline{A}^{\,1}_{55:\overline{10|}} = 0{,}024954$. (2 μονάδες)

2. Να αποδειχθούν οι παρακάτω σχέσεις:

   i. $e_x = p_x + {}_2p_x + {}_3p_x(1 + e_{x+3})$ (1 μονάδα)

   ii. $e_{x+1} - e_x = q_x e_{x+1} - p_x$ (1 μονάδα)

   iii. $(I\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n|}} = (I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} - \frac{m-1}{2m}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} + \frac{m-1}{2m}\cdot n \cdot {}_nE_x$, υπό την υπόθεση της γραμμικότητας του $v^t\ {}_tp_x$, $t \in (0,1), \forall x$. (3 μονάδες)

   Σημείωση: Ήδη γνωστά προσεγγιστικά αποτελέσματα, υπό την ίδια ως άνω υπόθεση, που αφορούν σε μη μεταβαλλόμενες ράντες, μπορείτε να τα χρησιμοποιήσετε άνευ απόδειξης.

   iv. $(Da)^{(m)}_{x:\overline{n|}} = (Da)_{x:\overline{n|}} + \frac{m-1}{2m}\left(n - a_{x:\overline{n|}}\right)$, υπό την υπόθεση της γραμμικότητας του $v^t\ {}_tp_x$, $t \in (0,1), \forall x$. (3 μονάδες)

   Σημείωση: Ήδη γνωστά προσεγγιστικά αποτελέσματα, υπό την ίδια ως άνω υπόθεση, που αφορούν σε μη μεταβαλλόμενες ράντες, μπορείτε να τα χρησιμοποιήσετε άνευ απόδειξης.

v. $P^{(m)}_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m} P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\left(P_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} + d\right)$, υπό την υπόθεση της γραμμικότητας του $v^t \; {}_tp_x$, $t \in (0,1), \forall x$. (2 μονάδες)

Σημείωση: Ήδη γνωστά προσεγγιστικά αποτελέσματα, υπό την ίδια ως άνω υπόθεση, ή άλλα αποτελέσματα, που αφορούν σε ράντες, μπορείτε να τα χρησιμοποιήσετε άνευ απόδειξης.

3. **Α.** Ο Λάζαρος και η Ζωή, ηλικίας 60 ετών και οι δύο, αγοράζουν μία ειδική ράντα πληρωτέα συνεχώς με ρυθμό:

   I. 1 ανά έτος, με βεβαιότητα για τα πρώτα 15 έτη.
   II. 1 ανά έτος, μετά τα πρώτα 15 έτη, εάν και ο Λάζαρος και η Ζωή είναι εν ζωή.
   III. $\frac{3}{4}$ ανά έτος, μετά τα πρώτα 15 έτη, εάν ο Λάζαρος είναι εν ζωή και η Ζωή έχει αποβιώσει.
   IV. $\frac{1}{2}$ ανά έτος, μετά τα πρώτα 15 έτη, εάν η Ζωή είναι εν ζωή και ο Λάζαρος έχει αποβιώσει.

   Δίνονται:

   i. Οι μελλοντικοί χρόνοι ζωής του Λάζαρου και της Ζωής είναι ανεξάρτητοι.
   ii. Και οι δύο υπόκεινται σε σταθερή ένταση θνησιμότητας, μ = 0,06.
   iii. Η ένταση ανατοκισμού είναι δ = 0,04.

   Υπολογίστε την αναλογιστική παρούσα αξία αυτής της ειδικής ράντας. (7 μονάδες)

   Β. Η ασφαλιστική εταιρεία θα επιβαρύνει το ασφαλιστήριο με έξοδα 1% επί των ανωτέρω καταβολών της ειδικής ράντας που αγοράζει ο Λάζαρος και η Ζωή. Υπολογίστε το ετήσιο, συνεχώς καταβαλλόμενο ασφάλιστρο, λαμβάνοντας υπόψη ότι αυτό θα πληρώνεται από την έναρξη του συμβολαίου μέχρι να πεθάνει ο τελευταίος από το ζεύγος. (3 μονάδες)

4. **Α.** Μία τράπεζα προγραμματίζει την αναδιάρθρωση ενός χαρτοφυλακίου εμπορικών δανείων, τα οποία έχει χορηγήσει. Όλα αυτά τα δάνεια, έχουν ανεξόφλητο υπόλοιπο €1 και ανεξαρτήτως της αρχικής τους διάρκειας, πρόκειται να αποπληρωθούν εντός των επόμενων 20 ετών, με σταθερή ετήσια δόση P, καταβλητέα με συνεχή ρυθμό, δηλαδή $P\bar{a}_{\overline{20}|} = 1$. Η ένταση ανατοκισμού, που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας των δανείων, είναι 0,06.

Εντός της προσεχούς 20ετίας, υπάρχει ο κίνδυνος ο δανειολήπτης να μην εξυπηρετήσει το δάνειό του, με «ένταση αθέτησης» 0,05. Η αθέτηση εξυπηρέτησης ενός δανείου θεωρείται μόνιμη και όχι προσωρινή. Παράλληλα, έχει τη δυνατότητα πρόωρης ολοσχερούς εξόφλησης του δανείου του, με «ένταση πρόωρης εξόφλησης» 0,03. Οι συμπεριφορές των δανειοληπτών είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Δεν υπάρχει άλλο αίτιο εξόδου ενός δανείου από το χαρτοφυλάκιο της τράπεζας.

Η κυβέρνηση εγκαινιάζει ένα πρόγραμμα εγγύησης ποσού €10.000, από τα ως άνω δάνεια. Σε περίπτωση αθέτησης εξυπηρέτησης ενός δανείου, κατά τη χρονική στιγμή t, η κυβέρνηση πρέπει να καταβάλει στην τράπεζα το ανεξόφλητο ποσό του δανείου, που είναι $P\bar{a}_{\overline{20-t|}}$, $0 < t < 20$. Για τη χρηματοδότηση του προγράμματος εγγυήσεων, η κυβέρνηση πρόκειται να επιβάλει ένα ετήσιο τέλος f, σε κάθε δανειολήπτη του οποίου το δάνειο συμπεριλαμβάνεται στο ως άνω χαρτοφυλάκιο. Το ετήσιο αυτό τέλος θα καταβάλλεται με συνεχή ρυθμό, καθ' όλη τη διάρκεια του έτους, για όσο χρονικό διάστημα το δάνειο παραμένει στο χαρτοφυλάκιο της τράπεζας ως εξυπηρετούμενο, εντός της περιόδου των 20 ετών. Η κυβέρνηση θέλει το πρόγραμμα εγγυήσεων να είναι αυτοχρηματοδοτούμενο και γι' αυτό υπολογίζει το τέλος με βάσει την αρχή της ισοδυναμίας, αγνοώντας τυχόν έξοδα. Η ένταση ανατοκισμού που χρησιμοποιεί, για να υπολογίσει την αναλογιστική παρούσα αξία της υποχρέωσης που δημιουργεί το πρόγραμμα εγγυήσεων, είναι 0,05.

Υπολογίστε:

i. Την πιθανότητα αθέτησης εξυπηρέτησης ενός δανείου, κατά τη διάρκεια των 20 ετών του προγράμματος. (1 μονάδα)
ii. Την υποχρέωση της κυβέρνησης, όπως προσδιορίζεται από την αναλογιστική παρούσα αξία του προγράμματος εγγυήσεων. (4 μονάδες)
iii. Το ετήσιο τέλος f. (1 μονάδα)

Σημείωση: Θεωρείστε την εγγύηση του δανείου από την κυβέρνηση, ως μία πρόσκαιρη ασφάλιση.

Β. Μια λογιστική μελέτη δείχνει ότι το κόστος διαχείρισης του προγράμματος εγγυήσεων, ανά δάνειο, αποτελείται από τρεις συνιστώσες:

- Κατά την έναρξη του προγράμματος, €0,011.
- Κατά την αθέτηση εξυπηρέτησης ενός δανείου, 10% επί του υπολειπόμενου ποσού του δανείου.
- Κατά την πρόωρη εξόφληση ενός δανείου, 1% επί του υπολειπόμενου ποσού του δανείου.

Η κυβέρνηση προτίθεται να επιβάλει ένα πρόσθετο ετήσιο τέλος g στους δανειολήπτες, με σκοπό να καλύψει τα παραπάνω έξοδα. Όπως και στην περίπτωση του f, το πρόσθετο αυτό τέλος θα καταβάλλεται με συνεχή ρυθμό, καθ' όλη τη διάρκεια του έτους, για όσο

χρονικό διάστημα το δάνειο παραμένει στο χαρτοφυλάκιο της τράπεζας ως εξυπηρετούμενο, εντός της περιόδου των 20 ετών.

Με βάση την αρχή της ισοδυναμίας, υπολογίστε το πρόσθετο ετήσιο τέλος g. (4 μονάδες)

5. **Α.** Χαρτοφυλάκιο περιέχει ασφαλιστήρια συμβόλαια του ίδιου τύπου, όπως περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα και με την ίδια ημερομηνία έναρξης:

Τύπος ασφάλισης	Μικτή, πληρωτέα στο τέλος του έτους θανάτου ή στην επιβίωση, με ετήσιο ασφάλιστρο καταβλητέο στην αρχή του έτους, καθ' όλη τη διάρκεια της ασφάλισης
Διάρκεια ασφάλισης (σε έτη)	4
Κεφάλαιο Θανάτου	10.000
Κεφάλαιο Επιβίωσης	10.000
Φύλλο	Άνδρας
Ηλικία (x) κατά την έναρξη του συμβολαίου	40
Τεχνικό Επιτόκιο (i)	0,01
Θνησιμότητα	Πίνακας ΕΑΕ 1990
Συντελεστής αξίας εξαγοράς	0,9000
Έξοδα Πρόσκτησης (επί του 1^{ου} Εμπορικού ασφαλίστρου μόνο)	0,2000
Έξοδα Διαχείρισης (ετήσια, επί του Ασφαλισμένου Κεφαλαίου)	0,0040

Για ένα ασφαλιστήριο που εμπεριέχεται στο παραπάνω χαρτοφυλάκιο, να υπολογιστούν τα παρακάτω:

i. Το Ετήσιο Καθαρό Ασφάλιστρο (P), σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας. (1 μονάδα)
ii. Το Ετήσιο Εμπορικό Ασφάλιστρο (G), σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας. (1 μονάδα)
iii. Τα Άρτια Μαθηματικά Αποθέματα ${}_tV$, στο τέλος του κάθε έτους συμβολαίου. (1 μονάδα)
iv. Τα Αναπόσβεστα Έξοδα Πρόσκτησης ${}_tDAC$, στο τέλος του κάθε έτους συμβολαίου. (1 μονάδα)
v. Οι Αξίες Εξαγοράς ${}_tCV$, στα τρία πρώτα έτη συμβολαίου. Οι όροι του ασφαλιστηρίου συμβολαίου ορίζουν ως αξία εξαγοράς, εκάστου έτους συμβολαίου, το 90% της διαφοράς μεταξύ του άρτιου μαθηματικού αποθέματος και των αναπόσβεστων εξόδων πρόσκτησης, στο τέλος του έτους. (1 μονάδα)

Δίνεται $\ddot{a}_{41:\overline{3}|} = 2{,}964275$ και $\ddot{a}_{42:\overline{2}|} = 1{,}987946$.

Β. Μετά από ένα έτος σε ισχύ των ασφαλιστηρίων συμβολαίων του ως άνω χαρτοφυλακίου, δηλαδή στο τέλος του 1ου έτους ασφάλισης (δεν έχει καταβληθεί ακόμα το εμπορικό ασφάλιστρο του 2ου έτους), η ασφαλιστική εταιρεία θέλει να υπολογίσει την υποχρέωσή της, για σχηματισμό αποθέματος, που προκύπτει από το ως άνω χαρτοφυλάκιο. Για το σκοπό αυτό προτίθεται να χρησιμοποιήσει τη μέθοδο των χρηματοροών, λαμβάνοντας υπόψη τις παρακάτω παραμέτρους:

		Έτος συμβολαίου (t)			
		1	**2**	**3**	**4**
Καμπύλη Επιτοκίων	Forward rates	-	0,0100	0,0090	0,0080
Πληθωρισμός (ετήσιος)	0,0300				
Θνησιμότητα	Πίνακας ΕΑΕ 2012				
Πιθανότητα Εξαγοράς		-	0,1500	0,1000	0,0600
Προμήθειες (ετήσιες, επί του εμπορικού ασφαλίστρου)	0,0700				
Έξοδα Διαχείρισης (ετήσια, επί του Ασφαλισμένου Κεφαλαίου)	0,0070				
Πλήθος συμβολαίων εν ισχύ στο τέλος του 1ου έτους ασφάλισης	500				

Να υπολογιστεί η βέλτιστη εκτίμηση του αποθέματος (best estimate reserves) για το χαρτοφυλάκιο, που προκύπτει με τη μέθοδο της προεξόφλησης της καθαρής χρηματοροής κάθε έτους, από το μέσο του έτους (discounted net cash flows).
(5 μονάδες)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

i. Δεν νοείται εξαγορά συμβολαίου στο 4ο έτος συμβολαίου.
ii. Για την μετατροπή των πιθανοτήτων θανάτου και εξαγοράς από πίνακες με ένα απαύξημα (single decrement environment) σε πίνακα με δύο απαυξήματα (double decrement environment), να χρησιμοποιηθεί η υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής των θανάτων (UDD).

Δίνονται οι πίνακες θνησιμότητας:

	ΕΑΕ 1990		**ΕΑΕ 2012**	
x	q_x (άνδρες)	q_x (γυναίκες)	q_x (Α)	q_x (Ρ)
40	0,001876	0,000819	0,001391	0,001095
41	0,002026	0,000909	0,001503	0,001195
42	0,002175	0,001011	0,001628	0,001317
43	0,002323	0,001124	0,001762	0,001461
44	0,002476	0,001245	0,001906	0,001628