ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:	**Επίθετο:**			
Ημερομηνία: 28/06/2019	**Πρωί:**	✓	**Απόγευμα:**	
Θεματική ενότητα: Αρχές Αναλογιστικής Προτυποποίησης, Κατασκευή και Αξιολόγηση Αναλογιστικών Προτύπων				

1. Ο αριθμός των ατυχημάτων που θα προκαλέσει ένας ασφαλισμένος μέσα στο επόμενο ασφαλιστικό έτος, ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$\pi(x|p) = \binom{3}{x} p^x (1-p)^{3-x}, \qquad x = 0,1,2,3.$$

Η παράμετρος p είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(p) = 5p^4, \qquad 0 < p < 1.$$

Να βρεθεί η πιθανότητα για έναν ασφαλισμένο να προκαλέσει ακριβώς 1 ατύχημα μέσα στο επόμενο ασφαλιστικό έτος.

(Α) μικρότερη από 6%

(Β) τουλάχιστον 6% αλλά μικρότερη από 8%

(Γ) τουλάχιστον 8% αλλά μικρότερη από 10%

(Δ) τουλάχιστον 10% αλλά μικρότερη από 12%

(Ε) τουλάχιστον 12%

2. Για μία σύνθετη διαδικασία συνολικών αποζημιώσεων S ισχύει:

- το ύψος των αποζημιώσεων X ακολουθεί Ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,100]$
- ο αριθμός των αποζημιώσεων ακολουθεί την διακριτή κατανομή:

  $Pr(N=0) = \frac{6}{10}, \quad Pr(N=1) = \frac{3}{10}, \quad Pr(N=2) = \frac{1}{10}$
- $N,\ X$ ανεξάρτητα.

Να βρεθεί η $F_S(25)$.

(Α) 0,62 (Β) 0,64 (Γ) 0,66 (Δ) 0,68 (Ε) 0,70

3. Δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες για χαρτοφυλάκιο κλάδου Γενικής Αστικής Ευθύνης αποτελούμενο από 2500 ασφαλισμένους:

I. $X_i = \sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij}$ η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει την ετήσια ζημιά για τον i ασφαλισμένο.

II. $N_1, N_2, \ldots, N_{2500}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν αρνητική διωνυμική κατανομή με μέση τιμή 0,4 και διασπορά 0,48.

III. $Y_{i1}, Y_{i2}, \ldots, Y_{iN_i}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν Pareto κατανομή με παραμέτρους $a = 3$ και $\theta = 1000$.

IV. Για να εξασφαλιστεί πλήρης αξιοπιστία υποθέτουμε ότι με πιθανότητα 90% οι συνολικές αποζημιώσεις που θα συμβούν δεν αποκλίνουν από τις αναμενόμενες περισσότερο από 5%.

V. Δίνεται συνάρτηση κατανομής $Pareto$ $F(x) = 1 - \theta^a * (\theta + x)^{-a}, a > 1$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση περιορισμένης διακύμανσης υπολογίστε το δείκτη Z για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο.

Δίνεται $z_{\alpha/2} = 1.645$

(Α) 0,34 (Β) 0,37 (Γ) 0,41 (Δ) 0,43 (Ε) 0,47

4. Έστω η τυχαία μεταβλητή $W = 2^N$ με $N = 0,1,2,3, \ldots$. Η τ.μ. N ακολουθεί $Poisson$ με μέση τιμή Λ και η τ.μ. Λ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,4]. Να υπολογιστεί η μέση τιμή της τ.μ. W, $E(W)$.

(Α) μικρότερη από 14

(Β) τουλάχιστον 14 αλλά μικρότερη από 15

(Γ) τουλάχιστον 15 αλλά μικρότερη από 16

(Δ) τουλάχιστον 16 αλλά μικρότερη από 17

(Ε) τουλάχιστον 17

5. Η τυχαία μεταβλητή N έχει την ακόλουθη κατανομή:

i. με πιθανότητα p ακολουθεί Διωνυμική $(n = 2, q = 0{,}5)$ και

ii. με πιθανότητα $1 - p$ ακολουθεί Διωνυμική $(n = 4, q = 0{,}5)$.

Ποια είναι η $Pr(N = 2)$;

(Α) $0{,}125p^2$

(Β) $0{,}375 + 0{,}125p$

(Γ) $0{,}375 + 0{,}125p^2$

(Δ) $0{,}375 - 0{,}125p^2$

(Ε) $0{,}375 - 0{,}125p$

6. Δίνονται:

i. Οι αποζημιώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή θ.

ii. Ένα δείγμα αποζημιώσεων:

100 200 400 800 1.400 3.100

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο δέλτα, να υπολογιστεί η ασυμπτωτική διασπορά του εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας για την πιθανότητα $S(1.500)$.

Σημείωση: $S(x) = 1 - F(x)$.

(Α) 0,019 (Β) 0,025 (Γ) 0,032 (Δ) 0,039 (Ε) 0,045

7. Το ύψος των αποζημιώσεων χαρακτηρίζονται από τη κατανομή $Pareto$ με παραμέτρους $b = 150$ και $\alpha = 2$. Η ασφαλιστική εταιρία αναθέτει σε μεσίτη ασφαλειών την τοποθέτηση αντασφαλιστικής κάλυψης με ιδία κράτηση A τέτοια ώστε το 90% των αποζημιώσεων να καλύπτεται από την ασφαλιστική εταιρία. Ποιο είναι το A ;

Δίνεται: $F(x) = 1 - b^a * (b + x)^{-a}, a > 1$

(Α) 473,44 (Β) 115,4 (Γ) 324,34 (Δ) $\frac{150}{0{,}1^{1/2}} - 0{,}9$ (Ε) $1 - \left(\frac{150}{150+0{,}9}\right)^2$

8. Δίνονται:

i. Η κατανομή των αποζημιώσεων είναι η:

x	p
100	0,2
200	0,2
300	0,6

ii. Υπάρχει απαλλαγή ύψους 150€ ανά ζημιά.

iii. Y^P είναι η τ.μ. της πληρωμής ανά πληρωμή.

Να υπολογιστεί η $Var(Y^P)$.

(Α) 1.250 (Β) 1.875 (Γ) 2.750 (Δ) 3.625 (Ε) 4.000

9. Ελληνική ασφαλιστική εταιρία αποφασίζει να αντασφαλίσει με μη αναλογική κάλυψη υπερβάλλουσας ζημιάς χαρτοφυλάκιο βιομηχανικών κινδύνων. Ο αντασφαλιστής χρησιμοποιεί για την τιμολόγηση τον λόγο των αναμενόμενων αποζημιώσεων μετά την αντασφάλιση σε σχέση με τις αναμενόμενες αποζημιώσεις πριν την αντασφάλιση ($Loss\ elimination\ ratio\ r(a)$). Η συνάρτηση κατανομής του ύψους των αποζημιώσεων (X) περιγράφεται από την σχέση $F(x) = 1 - b^a * (b + x)^{-a},\ a > 1$ και το πλήθος των συμβάντων ακολουθεί κατανομή $Poisson$ με εκτίμηση για τη φετινή χρονιά 10 γεγονότα. Η πιθανότητα να συμμετέχει ο αντασφαλιστής είναι 25%. Ποια η τιμή του $Loss\ elimination\ ratio\ r(a)$;

(Α) $75\% - 25\% * \frac{a}{b}$ (Β) $25\% * \frac{a+b}{b}$ (Γ) $25\% * \frac{a+b}{\alpha-1}$

(Δ) $75\% - 25\% * \frac{a+b}{b}$ (Ε) $75\% - 25\% * \frac{a+b}{\alpha-1}$

10. Δίνονται τα παρακάτω στοιχεία αποζημιώσεων:

Ύψος ζημιάς	*Αριθμός ζημιών*	*Σύνολο ζημιών**
$0-99$	2.900	154.227
$100-249$	1.200	210.000
$250-499$	800	320.000
$500-999$	500	375.000
>999	300	600.000
Σύνολο	5.700	1.659.227

$*$ *χωρίς απαλλαγή*

Να υπολογιστεί το ποσοστό της μείωσης των αποζημιώσεων εφαρμόζοντας απαλλαγή 250€ αντί για 100€.

(Α) 25% (Β) 27% (Γ) 29% (Δ) 31% (Ε) 33%

11. Έστω ότι οι αποζημιώσεις X έχουν σ.π.π. την:

$$f(x) = \frac{3}{8}x^2, \qquad 0 \le x \le 2$$

Χρησιμοποιείτε προσομοίωση και τη μέθοδο της αντιστροφής ($inversion$) για να εκτιμήσετε τη $E[(X-1)_+]$. Οι τυχαίοι αριθμοί από την ομοιόμορφη κατανομή για την προσομοίωση είναι: 0,10 0,30 0,50 0,80.

Ποιο είναι το αποτέλεσμα της προσομοίωσης;

(Α) 0.40 (Β) 0.45 (Γ) 0.50 (Δ) 0.55 (Ε) 0.60

12. Εάν η κατανομή της τ.μ. Y ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών και η $f(y)$ μπορεί να γραφεί στην μορφή $f(y) = exp\big(yb(\theta) + c(\theta) + d(y)\big)$, όπου b, c και d συναρτήσεις, τότε:

I. $E(y) = -\frac{c'(\theta)}{b'(\theta)}$

II. $Var(y) = \frac{b''(\theta)c'(\theta) - c''(\theta)b'(\theta)}{\big(b'(\theta)\big)^3}$

III. $E(y^2) = -\frac{c''(\theta)}{b''(\theta)}$

Προσδιορίστε ποιες από τις παραπάνω σχέσεις είναι σωστές.

(Α) Καμία δεν είναι σωστή

(Β) Μόνο η I

(Γ) I και II

(Δ) I και III

(Ε) II και III

13. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

		Κατανομή Πλήθους Αποζημιώσεων				
Κατηγορία	Ασφαλισμένοι	0	1	2	3	4
1	3000	1/3	1/3	1/3	0	0
2	2000	0	1/6	2/3	1/6	0
3	1000	0	0	1/6	2/3	1/6

Ένας τυχαία επιλεγμένος ασφαλισμένος έχει ένα συμβάν τον πρώτο χρόνο. Με χρήση της θεωρίας του $Bayes$ ποιο το αναμενόμενο πλήθος των αποζημιώσεων στο δεύτερο έτος για τον ίδιο ασφαλισμένο.

(Α) 1 (Β) 1,25 (Γ) 1,33 (Δ) 1,67 (Ε) 1,75

14. Για ένα κίνδυνο οι αποζημιώσεις ακολουθούν την κατανομή $Poisson$ με μέση τιμή 3. Η ασφαλιστική επιχείρηση A ασφαλίζει τον κίνδυνο εφαρμόζοντας απαλλαγή ίση με 2. Η ασφαλιστική επιχείρηση B ασφαλίζει τον ίδιο κίνδυνο εφαρμόζοντας συνασφάλιση $\alpha\%$, δηλαδή η εταιρεία B θα αποζημιώσει το $\alpha\%$ της συνολικής ζημιάς. Η μέση αποζημίωση για τις δύο εταιρείες είναι ίση.
Να υπολογιστεί το α.

(Α) 22% (Β) 27% (Γ) 32% (Δ) 37% (Ε) 42%

15. Δίνεται ανέλιξη σύνθετη $Poisson$ με $\lambda = 2$, $p(x) = \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}$, $x \geq 0$, $\theta = 1$ και αρχικό αποθεματικό $u = 10\rho_1$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια $M_{U(20)}(z)$.

(Α) e^{250z}

(Β) $e^{\frac{1+9z}{1+5z}}$

(Γ) $e^{250z\left(\frac{1+9z}{1+5z}\right)}$

(Δ) $e^{250z\left(\frac{1+5z}{1+9z}\right)}$

(Ε) $e^{\frac{z+5z^2}{1+9z}}$

16. Το ετήσιο πλήθος των αποζημιώσεων για έναν ασφαλισμένο ακολουθεί κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας: $p(x/q) = \binom{2}{x}q^x(1-q)^{2-x}$, $x = 0, 1, 2$.
Η παράμετρος q έχει κατανομή με σ.π.π $\pi(q) = 4q^3$, $0 < q < 1$.
Τον πρώτο και δεύτερο χρόνο παρατηρήθηκαν από μία αποζημίωση. Ποια η εκτίμηση κατά $Bayes$ για το πλήθος των αποζημιώσεων του τρίτου έτους;

(Α) 4/3 (Β) 2/3 (Γ) 1/3 (Δ) 12/7 (Ε) 3/2

17. Δίνονται τα παρακάτω:

			Τρίγωνο Σωρευτικών Πληρωμών ανά έτος εξέλιξης			
Έτος Ατυχήματος	Δεδουλευμένα Ασφάλιστρα	Αναμενόμενος Δείκτης Ζημιών	1	2	3	4
2015	19.000	90%	4.850	9.700	14.100	15.510
2016	20.000	85%	5.150	10.300	13.900	
2017	21.000	91%	5.400	10.800		
2018	22.000	$\boldsymbol{X}$	7.200			

Η εξέλιξη των αποζημιώσεων σταματάει στο 4ο έτος.

Το συνολικό απόθεμα που εκτιμήθηκε με την μέθοδο $Bornhuetter - Ferguson$ για όλα τα έτη ατυχήματος είναι ίσο με 21.321.

Να υπολογιστεί η ο αναμενόμενος δείκτης ζημιών για το έτος ατυχήματος 2018.

(Α) 82% (Β) 84% (Γ) 86% (Δ) 88% (Ε) 90%

18. Δίνεται $p(x) = \frac{5}{2}x\sqrt{x},\ \ 0 < x < 1$. Να βρεθεί η πιθανότητα $Pr(L_1 < 0{,}5)$.

(Α) 0,480 (Β) 0,544 (Γ) 0,665 (Δ) 0,721 (Ε) 0,773

19. Ασφαλιστική εταιρία αναλαμβάνει κινδύνους που ακολουθούν κατανομή $lognormal$ με μέση τιμή 300 και τυπική απόκλιση 400. Η εταιρία αγοράζει αντασφαλιστική κάλυψη $excess\ of\ loss$ με ιδία κράτηση 500 ανά ζημιά.

Ποια είναι η αναμενόμενη αποζημίωση που αντιστοιχεί στον πρωτασφαλιστή;

Δίνονται:

I. Η ποσότητα $E(X|X < 500)$ ισούται με 150

II. $\Phi(1{,}01) = 0{,}84375$

III. $\Phi(1{,}49) = 0{,}93189$

(Α) 145 (Β) 185 (Γ) 187 (Δ) 215 (Ε) 228

20. Ποια από τις παρακάτω είναι λάθος σχετικά με τις μη-αναλογικές καλύψεις;

1) Η $excess\ of\ loss$ είναι πιο εύκολη στη διαχείριση από την $stop\ loss$ με αποτέλεσμα ο αντασφαλιστής να μην δίνει προμήθειες.
2) Ο κίνδυνος του αντασφαλιστή είναι άνω φραγμένος για την $excess\ of\ loss$ αλλά όχι για την $stop\ loss$.
3) Η κάλυψη $excess\ of\ loss$ προσθέτει ομοιογένεια στο χαρτοφυλάκιο.
4) Η κάλυψη $stop\ loss$ δεν προστατεύει από αύξηση συχνότητας.

(Α) μόνο η 1

(Β) η 1 και η 2

(Γ) μόνο η 3

(Δ) η 1 η 2 και η 4

(Ε) όλες

21. Η μέθοδος Μερικής Αξιοπιστίας εφαρμόζεται σε ένα σύνολο δεδομένων 50 αποζημιώσεων. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του ύψους της αποζημίωσης είναι ομοιόμορφη στο διάστημά $[0, \theta]$. Για να εξασφαλιστεί πλήρης αξιοπιστία θεωρούμε με πιθανότητα 90% ότι οι αποζημιώσεις που θα συμβούν δεν αποκλίνουν από τις αναμενόμενες περισσότερο από $\theta = 5\%$. Δίνεται ότι ο δείκτης για μερική αξιοπιστία είναι ο Z. Παρατηρούνται και καταγράφονται 25 ακόμα αποζημιώσεις με αποτέλεσμα να αναθεωρηθεί η κατανομή του ύψους της αποζημίωσης σε ομοιόμορφη στο διάστημα $[0,\ 1{,}2\theta]$. Ο αναθεωρημένος δείκτης για μερική αξιοπιστία είναι ο Z'. Ποια η τιμή του κλάσματος Z'/Z ;

Δίνεται $Z_{\alpha/2} = 1.645$

(Α) $\frac{1}{1{,}5}$ (Β) $\sqrt{\frac{1}{1{,}5}}$ (Γ) 1 (Δ) $\sqrt{1{,}5}$ (Ε) 1,5

22. Δίνονται $p(x) = 2e^{-4x} + 3e^{-6x}$, $x \geq 0$ και $\theta = \frac{4}{5}$. Να βρεθεί η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$.

(Α) $\frac{8}{15}e^{-2u} + \frac{1}{45}e^{-\frac{16}{3}u}$ (Β) $\frac{1}{2}e^{-2u} + \frac{1}{18}e^{-\frac{16}{3}u}$ (Γ) $\frac{14}{27}e^{-2u} + \frac{1}{27}e^{-\frac{16}{3}u}$

(Δ) $\frac{8}{15}e^{-2u} + \frac{1}{45}e^{-5u}$ (Ε) $\frac{1}{2}e^{-2u} + \frac{1}{18}e^{-5u}$

23. Το πλήθος των αποζημιώσεων για κάθε ασφαλισμένο ακολουθεί κατανομή $Poisson$ με μέσο λ. Η πρότερη κατανομή της λ είναι $Γάμμα$ με παραμέτρους $n = 1$ και $\beta = \frac{1}{1,2}$. Κατά τη διάρκεια του πρώτου χρόνου παρατηρούνται 3 αποζημιώσεις ενώ καμία για τον δεύτερο χρόνο. Κάνοντας χρήση της θεωρίας αξιοπιστίας κατά $Bühlmann$ ποιο το αναμενόμενο πλήθος αποζημιώσεων τον τρίτο χρόνο;

(Α) 1,35 (Β) 1,36 (Γ) 1,40 (Δ) 1,41 (Ε) 1,43

24. Το μηνιαίο πλήθος των αποζημιώσεων ανά ασφαλισμένο ακολουθεί $Poisson$ με μέσο λ. Η πρότερη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της λ είναι $f(\lambda) = \frac{(100\lambda)^6 * e^{-100\lambda}}{120\lambda}$.
Δίνεται επίσης ο παρακάτω πίνακας με δεδομένα.

Μήνας	Πλήθος Ασφαλισμένων	Πλήθος Συμβάντων
1	100	6
2	150	8
3	200	11
4	300	X

Ποια είναι η τιμή του X με χρήση της θεωρίας $Bühlmann$;

(Α) 16,7 (Β) 16,9 (Γ) 17,3 (Δ) 18,1 (Ε) 18,3