ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:		**Επίθετο:**			
Ημερομηνία:	**26/06/2021**	**Πρωί:**		**Απόγευμα:**	✓
Θεματική ενότητα: Αρχές Αναλογιστικής Προτυποποίησης, Κατασκευή και Αξιολόγηση Αναλογιστικών Προτύπων					

Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α !!!!!!

Θέμα 1ο

α)Ασφαλιστική εταιρεία έχει ένα χαρτοφυλάκιο από συμβόλαια γενικής αστικής ευθύνης. Έστω X το ύψος της ζημιάς ανά συμβάν, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ για $x > 0$. Τα συμβόλαια στο χαρτοφυλάκιο αυτό έχουν όριο συμβολαίου ($policylimit$) ύψους M. Έστω η τ.μ. Y περιγράφει την πληρωμή της ασφαλιστικής εταιρείας μετά την εφαρμογή του ορίου συμβολαίου.

(i) (a) Να γραφεί η τ.μ. Y συναρτήσει της τ.μ. X.

(b) Να εξαχθεί η σ.π.π. της Y συναρτήσει της X

(2 μονάδες)

Ο αναλογιστής της ασφαλιστικής εταιρείας εκτιμά ότι η X ακολουθεί την κατανομή Weibull με σ.π.π. $f_X(x) = 0{,}6cx^{-0{,}4}e^{-cx^{0{,}6}}$, όπου c είναι άγνωστη σταθερά.

Το όριο συμβολαίου είναι 1.000€. Παρατηρούνται οι ακόλουθες ζημιές:

Ζημίες κάτω από το όριο συμβολαίου: $156, 208, 232, 270, 378, 486, 540, 700, 822, 982.$

Ζημιές πάνω από το όριο συμβολαίου: 5

Συνολικός αριθμός ζημιών: 15

(ii) Να εκτιμηθεί το c χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας.

(2 μονάδες)

(iii)Να εκτιμηθεί το c χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αντιστοίχησης ποσοστημορίων με τη διάμεσο.

(2 μονάδες)

β)Δίνονται στον παρακάτω πίνακα οι σωρευτικές πληρωθείσες αποζημιώσεις (cumulative paid claims) από ένα χαρτοφυλάκιο συμβολαίων γενικών κλάδων (ποσά σε χιλ. €) :

Έτος Ατυχήματος	Έτος Εξέλιξης 0	1	2
2017	2.440	3.294	3.788
2018	2.065	2.849	
2019	2.158		

Ο ετήσιος πληθωρισμός που αφορούσε ζημιές του παρελθόντος καθώς και ο πληθωρισμός που αφορά μελλοντικές ζημιές περιγράφονται από τον παρακάτω δείκτη:

Έτος	Δείκτης
2017	100
2018	105
2019	109
2020	116
2021	123

Να χρησιμοποιηθεί η inflation adjusted chain ladder μέθοδος για να υπολογιστούν οι συνολικές εκκρεμείς ζημιές για το χαρτοφυλάκιο.

(4 μονάδες)

Θέμα 2ο

Ο συνολικός αριθμός των ζημιών N σε ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλιστικών κινδύνων ακολουθεί την κατανομή $Poisson$ με μέση τιμή λ. Το ύψος της αποζημίωσης για κάθε μία ζημιά είναι ανεξάρτητο του N και ακολουθεί κατανομή X με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2. Το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων μέσα στην χρονιά συμβολίζεται με S και έχει κατανομή σύνθετη $Poisson$.

(i) Ξεκινώντας από τον ορισμό για τη ροπογεννήτρια της S, $M_S(t) = E(e^{ts})$, να καταλήξετε στην σχέση της ροπογεννήτριας της S με την ροπογεννήτρια της X, $M_S(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$.

(3 μονάδες)

(ii) Από την ροπογεννήτρια της S, να εξαχθούν οι σχέσεις για την μέση τιμή και τη διασπορά της S ως προς τα λ, μ και σ.

(3 μονάδες)

Για ένα συγκεκριμένο τύπο συμβολαίου, οι ατομικές αποζημιώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή 100€. Για τις ζημιές που ξεπερνούν τα 200€, ο ασφαλιστής χρεώνεται ένα επιπρόσθετο κόστος της τάξεως των 50€ ανά ζημιά.

(iii) Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά της S (συμπεριλαμβανομένου και του επιπρόσθετου κόστους ανά ζημιά), για ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από τέτοιου τύπου συμβόλαια, με $\lambda = 500$.

(4 μονάδες)

Θέμα 3ο

α) Η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής L (μέγιστη σωρευτική απώλεια) που συνδέεται με μία σύνθετη $Poisson$ διαδικασία είναι:

$$M_L = \frac{1-2r}{1-20r}$$

Να βρεθούν:

(i) η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. L,

(ii) το περιθώριο ασφαλείας θ, η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. L_1καθώς και ο συντελεστής προσαρμογήςR.

(5 μονάδες)

β) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας $Gamma$ κατανομής δίνεται με την παρακάτω παραμετρική μορφή:

$$f(x) = \frac{\alpha^{\alpha}}{\mu^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x\alpha}{\mu}} \quad , \qquad \gamma\iota\alpha\ x > 0$$

(i) Να εκφραστεί η παραπάνω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας υπό την μορφή μέλους της εκθετικής οικογένειας, προσδιορίζοντας όλες τις σχετικές παραμέτρους.

(ii) Στη συνέχεια να δειχτεί ότι ο μέσος και η διασπορά της κατανομής είναι μ και $\frac{\mu^2}{\alpha}$ αντίστοιχα.

(5 μονάδες)

Θέμα 4ο

α)Κατά τη διάρκεια υπολογισμού ασφαλίστρων διαφοροποιημένων ανά κατηγορία ασφαλισμένων με το πρότυπο BUHLMANN – STRAUB χρησιμοποιήθηκαν τα ακόλουθα δεδομένα ανά έτος $j = 1, 2, 3$ και ανά κατηγορία $i = 1, 2$

Έτος j		1	2	3
Κατηγορία 1	Πλήθος αποζημιώσεων	40	50	40
	Μέση αποζημίωση	200	220	250
Κατηγορία 2	Πλήθος αποζημιώσεων	100	120	120
	Μέση αποζημίωση	200	200	150

Να υπολογιστεί το ασφάλιστρο του $4ου$ έτους για την κατηγορία 2, αν ως βάρη χρησιμοποιηθούν τα πλήθη των αποζημιώσεων για κάθε κατηγορία.

(5 μονάδες)

β) Το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (m, p). Η παράμετρος p έχει κατανομή $Beta(\alpha, b)$ και το πλήθος των αποζημιώσεων που παρατηρήθηκαν σε λ περιόδους είναι $n_1, n_2, \dots, n_\lambda$ αντίστοιχα.

I. Να δείξετε την εκτίμηση για το ασφάλιστρο της επόμενης χρησης με τη μέθοδο Bayes

(2,5 μονάδες)

II. Να δείξετε ότι η εκτίμηση κατά $Bühlmann$ για το ασφάλιστρο της επόμενης χρήσης είναι ίση με $\mathrm{m}\frac{\mathrm{a}+\sum_1^\lambda n_k}{\mathrm{a+b}+\lambda\mathrm{m}}$ και εξηγήστε για ποιό λόγο θα περιμένατε οι δύο προσεγγίσεις να συμπίπτουν.

(2,5 μονάδες)

Θέμα 5ο

α) Σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο υπάρχουν 3 τύποι συμβολαίων με συνολικά 1.000 συμβόλαια με διαφορετικά ασφαλισμένα κεφάλαια. Για κάθε συμβόλαιο συμβαίνει με πιθανότητα p μια ζημιά και καμία ζημιά με πιθανότητα $1-p$. Οι ζημιές των συμβολαίων αυτών είναι ανεξάρτητες και ισχύει:

Τύπος Συμβολαίου	Πλήθος	Ασφαλισμένα κεφάλαια	p
1	500	100	0,0050
2	400	400	0,0025
3	100	1000	0,0010

Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή, τη διασπορά και τον συντελεστή μεταβλητότητας των ζημιών που παραμένουν στον πρωτασφαλιστή:

(i) Χωρίς αντασφάλιση

(ii) Με αντασφάλιση τύπου Q/S με αναλογία πρωτασφαλιστή 10%

(iii) Με αντασφάλιση τύπου surplus με κράτηση εταιρίας 200 (1 γραμμή) και απεριόριστη χωρητικότητα (διαθέσιμη κάλυψη από πλευράς του αντασφαλιστή)

(iv) Ποια από τις τρεις προηγούμενες επιλογές δίνει για τον πρωτασφαλιστή τον μικρότερο κίνδυνο, όταν αυτός μετριέται με τον συντελεστή μεταβλητότητας και γιατί;

(5 μονάδες)

β) Ασφαλιστική εταιρία αντασφαλίζει χαρτοφυλάκιο με κάλυψη υπερβάλλουσας ζημίας με ιδία κράτηση m. Έστω ότι το ύψος της ζημιάς X ακολουθεί εκθετική κατανομή $X \sim \exp(\lambda)$, όπου $1/\lambda = 6.500$. Έστω ότι η ιδία κράτηση τοποθετείται στις 10.000€.

I. Ποια θα είναι η αναμενόμενη τιμή τού ύψους της αποζημίωσης που αντιστοιχεί στον πρωτασφαλιστή $E(Y)$ σε περίπτωση που υπάρξει πληθωρισμός κατά 7%με το ποσό της ιδίας κράτησης να μην μεταβάλλεται. **(3,5 μονάδες)**

II. Ποια είναι η ποσοστιαία επίδραση του πληθωρισμού στην αποζημίωση του πρωτασφαλιστή. **(1,5 μονάδες)**