ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:	**Επίθετο:**		
Ημερομηνία: 31/07/2020	**Πρωί:**	**Απόγευμα:**	✓
Θεματική ενότητα: Αρχές Αναλογιστικής Προτυποποίησης, Κατασκευή και Αξιολόγηση Αναλογιστικών Προτύπων			

Ερώτημα 1

α) Η κατανομή της τ.μ. Y ανήκει σε ένα υποσύνολο της εκθετική οικογένειας κατανομών και έχει την παρακάτω παραμετρική μορφή:

$$f(y,\theta,\varphi) = exp\left[\frac{y\theta - b(\theta)}{\varphi} + c(y,\theta)\right]$$

με δεδομένες τις παραμέτρους θ και φ και τις συναρτήσεις bκαι c.

(i) Να δειχτεί ότι η ροπογεννήτρια της Yδίνεται από την:

$$M_Y(t) = exp\left[\frac{b(\theta + t\varphi) - b(\theta)}{\varphi}\right]$$

Σημείωση: η συνάρτηση $f(y,\theta+\varphi t,\varphi)$ είναι η πυκνότητα μιας άλλης τ.μ. από την ίδια οικογένεια κατανομών και έτσι $\int_{-\infty}^{\infty} f(y,\theta+\varphi t,\varphi)\,dy = 1$

(2 μονάδες)

(ii) Να δειχτεί ότι $E(Y) = b'(\theta)$και $Var(Y) = \varphi b''(\theta)$, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα στο (i).

(3 μονάδες)

(iii)Επαληθεύστε το αποτέλεσμα στο (i)στην περίπτωση που η Y ακολουθεί κατανομή $Poisson$.

(2 μονάδες)

β)Ο ετήσιος αριθμός ζημιών για ένα συμβόλαιο μέσα από ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, ακολουθεί κατανομή $Poisson$με μέση τιμή μ. Η παράμετρος μ διαφέρει από συμβόλαιο σε συμβόλαιο και μπορεί να θεωρηθεί σαν τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\lambda$.

Να βρεθεί η αδέσμευτή κατανομή του ετήσιου αριθμού ζημιών ενός τυχαία επιλεγμένου συμβολαίου από αυτό το χαρτοφυλάκιο. Να περιγράφουν αναλυτικά όλα τα βήματα. Στην περίπτωση που η ευρεθείσα κατανομή είναι μια από τις γνωστές κατανομές, να γραφούν το όνομα και η παράμετρός αυτής.

(3 μονάδες)

Ερώτημα 2

α)Ένας αναλογιστής προσπαθεί να δημιουργήσει ψευδοτυχαίους αριθμούς N, για το πλήθος των αποζημιώσεων, προερχόμενους από την κατανομή $Poisson$με μέση τιμή λ.

(i) Χρησιμοποιώντας $\lambda = 2$, καθώς και τουςτυχαίους αριθμούς προερχόμενους από την ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$:

$$0.564, 0.505, 0.756, 0.610, 0.811$$

να δημιουργήσετενέους τυχαίους αριθμούς (όσους περισσότερους μπορείτε, με βάση τα δεδομένα) από την κατανομή $Poisson$χρησιμοποιώντας την μέθοδο της αντιστροφής $(inversionmethod)$.

(2 μονάδες)

(ii) Έστω ότι ένας εκτιμητής της διαμέσου $(median)$ του πλήθους των αποζημιώσεωνείναι η διάμεσος του δείγματος των τυχαίων αριθμών που δημιουργήσατε στο ερώτημα (i). Να εκτιμηθεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα(MSE)για τον συγκεκριμένο εκτιμητή, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο $bootstrap$.

(3 μονάδες)

β) Δίνονται στον παρακάτω πίνακα οι σωρευτικές πληρωθείσες αποζημιώσεις και το τελικό εκτιμώμενο κόστος των συνολικών αποζημιώσεων:

Έτος Συμβάντος	Έτος Εξέλιξης 0	1	2	3	Τελικό εκτιμώμενο κόστος
1	A	900	B	C	1.600
2	700	D	1.800		2.100
3	850	1.450			E
4	1.000				2.800

Η εξέλιξη των αποζημιώσεων σταματάει στο 4ο έτος.
Το τελικό εκτιμώμενο κόστος των αποζημιώσεων έχει υπολογιστεί με χρήση της βασικής μεθόδου $Chain\ Ladder$και οι δείκτες εξέλιξης($development\ factors$) για τα δύο πρώτα έτη εξέλιξης είναι ίσοι.

(i) Να υπολογιστούν τα A, B, CκαιD.

(3 μονάδες)

(ii) Εάν τα δεδουλευμένα ασφάλιστρα για το έτος συμβάντος 3είναι ίσα με 3.000€ και ο αναμενόμενος δείκτης ζημίων (LR) είναι ίσος με80%, να εκτιμήσετε ξανά το Eχρησιμοποιώντας τη μέθοδο $Bornhuetter - Ferguson$.

(1 μονάδες)

(iii) Να υπολογιστούν οι εκκρεμείς αποζημιώσεις ($outstanding\ claims$) για όλα τα έτη συμβάντος διατηρώντας την εκτίμηση του ερωτήματος (ii)για το E.

(1 μονάδες)

Ερώτημα 3

α)Δίνεται σύνθετη $Poisson$διαδικασία συνολικών αποζημιώσεων S με $\lambda = 6$ και

$$Pr(X = 1) = \frac{1}{2}, \qquad Pr(X = 2) = \frac{1}{6}, \qquad Pr(X = 3) = \frac{1}{3}.$$

Να βρεθεί η $Pr(S \leq 5)$χρησιμοποιώντας:

(i) τη βασική μέθοδο (συνελίξεις),

(2 μονάδες)

(ii) την εναλλακτική μέθοδο,

(2 μονάδες)

(iii) την κατάλληλη αναδρομική σχέση.

(2 μονάδες)

β)

(i) Να οριστεί ο συντελεστής προσδιορισμού "R" μίας σύνθετης $Poisson$ διαδικασίας σε συνεχή χρόνο.

(1 μονάδες)

(ii) Ένας αναλογιστής εκτιμάει τα ετήσια ασφάλιστρα για ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο. Η πιθανότητα να φέρει ζημιά το συμβόλαιο είναι 3%. Το ύψος της ζημιάς θα είναι 100 με πιθανότητα 90% ή 1.000 με πιθανότητα 10%. Το περιθώριο ασφαλείας είναι ίσο με 0,3.Να υπολογιστεί ο συντελεστής προσδιορισμού "R"για αυτό το συμβόλαιο, αγνοώντας δυνάμεις του "R" μεγαλύτερες από 2.

(2 μονάδες)

(iii) Πως ορίζεται ο συντελεστής προσδιορισμού "R" μίας σύνθετης $Poisson$ διαδικασίας στην περίπτωση διακριτού χρόνου; Ποια η σχέση του με το συντελεστή προσδιορισμού που προκύπτει όταν μελετάμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας σε συνεχή χρόνο;

(1 μονάδες)

Ερώτημα 4

α) Το πλήθος των αποζημιώσεων χαρτοφυλακίου ακολουθεί κατανομή $Poisson$ και αναμένονται200 συμβάντα μέσα στην επόμενη χρήση. Το ύψος των αποζημιώσεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο 40. Η ασφαλιστική εταιρία υπολογίζει το ασφάλιστρο με τις συνολικές επιβαρύνσεις να ανέρχονται σε 40% και πρέπει να αποφασίσει αν θα συνάψει κάποια από τα παρακάτω σχήματα:

Α) Χωρίς αντασφάλιση.

Β)Αντασφάλιση $excess\ of\ loss$ με ιδία κράτηση 60 με αντασφαλιστή που εκτιμά 55% επιβαρύνσεις στον υπολογισμό του αντασφαλίστρου.

Γ) Απλή αναλογική σύμβαση με ιδία κράτηση 75% αντασφαλιστή που εκτιμά 45% επιβαρύνσεις στον υπολογισμό του αντασφαλίστρου.

(i) Να βρεθεί το αναμενόμενο κέρδος για την ασφαλιστική εταιρία σε κάθε μία από τις επιλογές Α, Β ή Γ.

(2,5 μονάδες)

(ii) Να υπολογισθεί η διασπορά των συνολικών αποζημιώσεων της ασφαλιστικής εταιρίας.

(2,5 μονάδες)

β)Ασφαλιστική εταιρία έχει αναλάβει χαρτοφυλάκιο συμβολαίων που οι αποζημιώσεις χαρακτηρίζονται από την κατανομή $Pareto$ με παραμέτρους $\alpha = 3$ και $\lambda = 100$. Η ασφαλιστική εταιρία αντασφαλίζει το χαρτοφυλάκιο με κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς ιδίας κράτησης M ώστε το 90% των αποζημιώσεων πληρώνονται από την ασφαλιστική εταιρία.

(i) Υπολογίστε το M.

(2,5 μονάδες)

(ii) Υπολογίστε το αναμενόμενο ύψος της αποζημίωσης που θα πληρώσει ο αντασφαλιστής για τα συμβάντα στα οποία συμμετέχει.

(2,5 μονάδες)

Δίνεται η Σ.Κ της $Pareto$: $F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\chi}\right)^{\alpha},\ x > 0$

Ερώτημα 5

α)Η κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων που συμβαίνουν κάθε εβδομάδα είναι N και ακολουθεί κατανομή $Poisson$ με άγνωστο μέσο. Για να εξασφαλιστεί πλήρης αξιοπιστία ώστε με πιθανότητα 90% οι αποζημιώσεις που θα συμβούν να μην αποκλίνουν από τις αναμενόμενες περισσότερο από 5% λαμβάνεται υπόψιν ο δειγματικός μέσος του N. Σε 20 εβδομάδες παρατηρούνται 400 αποζημιώσεις και το ασφάλιστρο P είναι το αποτέλεσμα που βασίζεται σε μερική αξιοπιστία. Με 500 παρατηρήσεις σε 30 εβδομάδες το ασφάλιστρο που προκύπτει από μερική αξιοπιστία είναι $P - 1{,}91$.

Να βρεθεί το ασφάλιστρο που βασίζεται σε μερική αξιοπιστία αν υπάρχουν 550 παρατηρήσεις σε 35 εβδομάδες. Σε όλες τις περιπτώσεις να υποθέσετε το ίδιο ασφάλιστρο αγοράς M.

Δίνεται $z_{\alpha/2} = 1.645$

(5 μονάδες)

β)Δίνεται ότι:

i) Το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί $Poisson$ με μέσο λ.

ii) Το ύψος των αποζημιώσεων ακολουθεί κατανομή $lognormal$ με παραμέτρους μ και σ.

iii) Το πλήθος και το ύψος των αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητα.

iv) Η πρότερη κατανομή έχει σ.π.π. $f(\lambda, \mu, \sigma) = 2\sigma\,, \quad 0 < \lambda < 1,\ 0 < \mu < 1,\ 0 < \sigma < 1$

Να υπολογιστεί ο συντελεστής K από τη θεωρία $Buhlmann$.

(5 μονάδες)