ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:	**Επίθετο:**		
Ημερομηνία: 28/06/2019	**Πρωί:**	**Απόγευμα:**	✓
Θεματική ενότητα: Αρχές Αναλογιστικής Προτυποποίησης, Κατασκευή και Αξιολόγηση Αναλογιστικών Προτύπων			

Ερώτημα 1

Μια φαρμακευτική εταιρεία διεξάγει μια ετήσια μελέτη για μια νέα ουσία, η οποία πρόκειται να χρησιμοποιηθεί σε δύο διαφορετικά φάρμακα. Οι επιστήμονες της εταιρείας μελετούν τρείς διαφορετικές ομάδες πειραματόζωων:

- Η πρώτη ομάδα A αποτελείται από 1.000 ανεξάρτητα μεταξύ τους άτομα, με ανεξάρτητο χρόνο ζωής, στα οποία δεν θα τους χορηγηθεί κανένα από τα δύο φάρμακα. Κάθε ένα από τα άτομα αυτά έχει πιθανότητα να πεθάνει ίση με $q = 0{,}20$.
- Η δεύτερη ομάδα B αποτελείται από 1.000 άτομα, στα οποία θα τους χορηγηθεί το φάρμακο I.
  - Με πιθανότητα 80%, κάθε άτομο της ομάδας έχει πιθανότητα να πεθάνει $q = 0{,}20$.
  - Με πιθανότητα 20%, κάθε άτομο της ομάδας έχει πιθανότητα να πεθάνει $q = 0{,}05$.
  - Δεδομένης της πιθανότητας θανάτου q, τα άτομα της ομάδας έχουν ανεξάρτητο χρόνο ζωής.
- Η τρίτη ομάδα Γ αποτελείται από 1.000 ανεξάρτητα μεταξύ τους άτομα, με ανεξάρτητο χρόνο ζωής, στα οποία θα τους χορηγηθεί το φάρμακο II. Το φάρμακο θα επηρεάσει διαφορετικά άτομα ανεξάρτητα και με διαφορετικό τρόπο.
  - Με πιθανότητα 80%, οποιοδήποτε δεδομένο άτομο από την ομάδα έχει πιθανότητα να πεθάνει $q = 0{,}20$.
  - Με πιθανότητα 20%, οποιοδήποτε δεδομένο άτομο από την ομάδα έχει πιθανότητα να πεθάνει $q = 0{,}05$.

Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των θανάτων:

(i) για την ομάδα A.

(2 μονάδες)

(ii) για την ομάδα B.

(4 μονάδες)

(iii) για την ομάδα Γ.

(4 μονάδες)

Ερώτημα 2

α) Οι συνολικές αποζημιώσεις σε ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλισμένων κινδύνων ακολουθούν μια $Poisson$ διαδικασία με παράμετρο λ. Τα ύψη των αποζημιώσεων X ακολουθούν κατανομή με σ.π.π.: $f(x) = 0{,}01^2 x e^{-0{,}01x}, \quad x > 0$. Η ασφαλιστική εταιρεία υπολογίζει τα ασφάλιστρα χρησιμοποιώντας περιθώριο ασφαλείας $\theta = 45\%$.

(i) Να εξαχθεί η ροπογεννήτρια $M_X(t)$.
(ii) Να καθοριστεί ο συντελεστής προσαρμογής R (μικρότερη θετική ρίζα).

(4 μονάδες)

β) Η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, δηλαδή:

$$Pr(Y = y) = (1-p)^{y-1}p, \quad y = 1,2,3 \ldots$$

(i) Να εκφραστεί η συνάρτηση πιθανότητας της μεταβλητής Y υπό μορφή μέλους της εκθετικής οικογένειας προσδιορίζοντας όλες τις σχετικές παραμέτρους.

(ii) Να δειχτεί ότι ο μέσος και η διασπορά της κατανομής της Y είναι $\frac{1}{p}$ και $\frac{1-p}{p^2}$ αντίστοιχα.

(iii) Χρησιμοποιώντας την "κανονική" συνδετική συνάρτηση ($canonical\ link\ function$), ορίστε ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο που συσχετίζει την μέση τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y με την ανεξάρτητη μεταβλητή X.

(iv) Έστω ότι δίνονται δεδομένα από ένα δείγμα παρατηρήσεων για τις τυχαίες μεταβλητές X και Y, δηλαδή (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n). Χρησιμοποιούμε το μοντέλο του ερωτήματος (iii) για να συνδέσουμε τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής Y με αυτές της ανεξάρτητης μεταβλητής X. Να γραφεί η συνάρτηση πιθανοφάνειας σε όρους των παραμέτρων του μοντέλου και των δεδομένων τιμών του δείγματος.

(6 μονάδες)

Ερώτημα 3

Μια ασφαλιστική επιχείρηση ασφαλίζει έναν κίνδυνο X εφαρμόζοντας όριο συμβολαίου $(policy\ limit)$ ίσο με 1.000€. Την περασμένη χρονιά οι αποζημιώσεις είχαν ύψη σε €:

$$550 \quad 332 \quad 710{,}8 \quad 431{,}2 \quad 132{,}15 \quad 910{,}3 \quad 800$$

και 4 αποζημιώσεις είχαν ύψη πάνω από 1.000€. Οι αποζημιώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο θ.

(i) Να βρεθεί η μέση τιμή των αποζημιώσεων χρησιμοποιώντας:

a) την μέθοδο αντιστοίχισης ποσοστημορίων $(percentile\ matching)$ και τη διάμεσο της κατανομής.

$(Σημείωση: F(\pi_{50\%}) = 0{,}5)$

b) την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας $(maximum\ likelihood\ estimation)$.

(ii) Η ίδια ασφαλιστική επιχείρηση ασφαλίζει έναντι του κινδύνου Y εφαρμόζοντας απαλλαγή $(deductible)$ ύψους 100. Το ύψος των αποζημιώσεων ακολουθεί κατανομή $Pareto$ με παραμέτρους $(\alpha,\ \theta = 1.500)$.

a) Να αποδειχτεί ότι η δεσμευμένη κατανομή των πληρωμών της ασφαλιστικής επιχείρησης ακολουθεί κατανομή $Pareto$ με σ.π.π.:

$$h(y) = \frac{a1.600^a}{(1.600 + y)^{a+1}}$$

b) Οι 10 τελευταίες αποζημιώσεις που πληρώθηκαν είχαν ύψη:

$$1.000 \quad 8.000 \quad 2.253 \quad 732 \quad 450 \quad 601 \quad 300 \quad 3.000 \quad 1.450 \quad 1.333{,}3$$

Να βρεθεί ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για το α.

(10 μονάδες)

Ερώτημα 4

Το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί κατανομή Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (m, p). Η παράμετρος p έχει κατανομή με $Beta(\alpha, b)$ και το πλήθος των αποζημιώσεων που παρατηρήθηκαν σε λ περιόδους είναι $n_1, n_2, \dots, n_\lambda$ αντίστοιχα.

(i) Να δείξετε ότι η Διωνυμική κατανομή ανήκει στην εκθετική οικογένεια

(1 μονάδα)

(ii) Να δείξετε ότι η εκτίμηση κατά $Bayes$ για την ύστερη κατανομή της p με χρήση προσέγγισης, είναι $Beta$.

(3 μονάδες)

(iii) Να δείξετε την εκτίμηση για το ασφάλιστρο της επόμενης χρήσης με τη μέθοδο $Bayes$.

(1 μονάδα)

(iv) Να δείξετε ότι η εκτίμηση κατά $Bühlmann$ για το ασφάλιστρο της επόμενης χρήσης είναι ίση με $m\frac{a+\sum_1^\lambda n_k}{a+b+\lambda m}$.

(4 μονάδες)

(v) Εξηγήστε για ποιο λόγο θα περιμένατε οι δύο προσεγγίσεις να συμπίπτουν.

(1 μονάδα)

Ερώτημα 5

α) Μέλη τριών κατηγοριών ασφαλισμένων μπορούν να φέρουν 0 ή 1 ή 2 ζημιές με την παρακάτω κατανομή :

Κατηγορία	Πλήθος Ζημιών		
	0	1	2
I	90%	0%	10%
II	80%	10%	10%
III	70%	20%	10%

Μία τυχαία κατηγορία επιλέγεται και τυχαίο πλήθος ασφαλισμένων της παρακολουθούνται για περίοδο δύο ετών :

Έτος	πλήθος ασφαλισμένων	Πλήθος Ζημιών
1	20	7
2	30	10

Να υπολογιστεί η πρόβλεψη για το πλήθος των ζημιών στο τρίτο έτος για 35 ασφαλισμένους από την ίδια κατηγορία με χρήση του προτύπου $Bühlmann$. (5 μονάδες)

β) Ασφαλιστική εταιρία που δραστηριοποιείται στον κλάδο πυρός αντασφαλίζει το χαρτοφυλάκιο με κάλυψη υπερβάλλουσας ζημίας με ιδία κράτηση m. Έστω ότι το ύψος της ζημιάς X ακολουθεί εκθετική κατανομή $X \sim \exp(\lambda)$, όπου $1/\lambda = 5.000$. Έστω ότι η ιδία κράτηση τοποθετείται στις 14.000€.

(i) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή τού ύψους της αποζημίωσης που αντιστοιχεί στον πρωτασφαλιστή $E(Y)$; (2 μονάδες)

(ii) Ποια θα είναι η αναμενόμενη τιμή τού ύψους της αποζημίωσης που αντιστοιχεί στον πρωτασφαλιστή $E(Y)$ σε περίπτωση που υπάρξει πληθωρισμός του κατά 8% χωρίς όμως να επιδρά στο ποσό της Ιδίας Κράτησης ; (2 μονάδες)

(iii) Ποια είναι τελικά η ποσοστιαία επίδραση του πληθωρισμού στην αποζημίωση του πρωτασφαλιστή; (1 μονάδα)