ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:	**Επίθετο:**		
Ημερομηνία: 06/07/2016	**Πρωί:**	**Απόγευμα:**	✓
Θεματική ενότητα: Αρχές Αναλογιστικής Προτυποποίησης, Κατασκευή και Αξιολόγηση Αναλογιστικών Προτύπων			

Ερώτημα 1

α) Δίνονται στον παρακάτω πίνακα οι σωρευτικές πληρωθείσες αποζημιώσεις και το τελικό εκτιμώμενο κόστος των συνολικών αποζημιώσεων:

Έτος Συμβάντος	Έτος Εξέλιξης 0	1	2	3	Τελικό εκτιμώμενο κόστος
1	1.001	1.485	1.762	W	X
2	1.250	Y	1.820		1.862,30
3	1.302	1.805			2.122,50
4	Z				2.278,80

Η εξέλιξη των αποζημιώσεων σταματάει στο 4ο έτος.

Το τελικό εκτιμώμενο κόστος των αποζημιώσεων για τα έτη συμβάντος 2 και 3, έχει υπολογιστεί με χρήση της βασικής μεθόδου Chain Ladder.

(i) Να υπολογιστούν τα W, X και Y.

Για το έτος συμβάντος 4 χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson, με δεδουλευμένα ασφάλιστρα 2.500€ και αναμενόμενη τιμή για τον δείκτη ζημιών (LR) 90%.

(ii) Να υπολογιστεί η τιμή του Z.

(iii) Να υπολογιστούν οι εκκρεμείς αποζημιώσεις (outstanding claims) για όλα τα έτη συμβάντος.

(6 μονάδες)

β) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας γάμμα κατανομής δίνεται με την παρακάτω παραμετρική μορφή:

$$f(x) = \frac{\alpha^{\alpha}}{\mu^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x\alpha}{\mu}} \quad , \qquad \gamma\iota\alpha\ x > 0$$

(i) Να εκφραστεί η παραπάνω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας υπό την μορφή μέλους της εκθετικής οικογένειας, προσδιορίζοντας όλες τις σχετικές παραμέτρους.

(ii) Στη συνέχεια να δειχτεί ότι ο μέσος και η διασπορά της κατανομής είναι μ και $\frac{\mu^2}{\alpha}$ αντίστοιχα.

(4 μονάδες)

Ερώτημα 2

α) Οι αποζημιώσεις έχουν σ.π.π την $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{3}x}$, $x > 0$ και το περιθώριο ασφαλείας ισούται με θ= $\frac{1}{2}$. Να βρεθεί η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$.

(5 μονάδες)

β) Δίνονται η σ.π της L_1 ίση με $\Pr(L_1 = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, n= 1,2, ... και $\theta = 1$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια $M_L(r)$ της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L και στη συνέχεια, μέσω αυτής να εξαχθεί η $f_L(n)$.

(5 μονάδες)

Ερώτημα 3

Το ύψος των αποζημιώσεων (σε μονάδες των 1.000€) ενός χαρτοφυλακίου ασφαλισμένων μοντελοποιείται με τη χρήση της τυχαίας μεταβλητής X με σ.π.π την :

$$f_X(x) = \frac{ac^a}{x^{a+1}}, \qquad x \geq c$$

όπου $a > 0$ και $c > 0$ είναι οι παράμετροι της κατανομής.

(i) Να επιβεβαιωθεί ότι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ X δίνεται από τον τύπο: $F_X(x) = 1 - \left(\frac{c}{x}\right)^a$, $x \geq c$ (και 0 για $x < c$).

Υποθέτουμε ότι $c = 2{,}5$, αλλά το a είναι άγνωστο και εκτιμάται από ένα τυχαίο δείγμα $x_1, x_2, \dots, x_n$.

(ii) Να δειχθεί ότι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας (MLE) για την a είναι:

$$\hat{a} = \frac{n}{\sum_{i=0}^{n} ln\left(\frac{x_i}{2{,}5}\right)}$$

(iii) Να υπολογιστεί η ασυμπτωτική διακύμανση για την $\hat{a}$ και να γραφεί η ασυμπτωτική κατανομή την οποία κατά προσέγγιση ακολουθεί η $\hat{a}$.

(iv) Έστω ένα δείγμα 30 παρατηρήσεων από την κατανομή της τ.μ Χ για το οποίο ισχύει:

$\sum_{i=0}^{n} ln(x_i) = 32{,}9$.

Να υπολογιστεί ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για την $\hat{a}$, καθώς και ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την a.

Δίνεται $z_{0,025} = 1{,}96$.

(v) Για το τρέχον έτος, υποθέτουμε ότι το ύψος των αποζημιώσεων ακολουθεί την κατανομή της τ.μ. Χ με $a = 6$ και $c = 2{,}5$. Ο πληθωρισμός για το επόμενο έτος αναμένεται να είναι 5%.

Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι το ύψος των αποζημιώσεων στο επόμενο έτος θα ξεπεράσει τις 4.000€.

(10 μονάδες)

Ερώτημα 4

α) Κατά τη διάρκεια υπολογισμού ασφαλίστρων διαφοροποιημένων ανά περιοχή με το πρότυπο BUHLMANN – STRAUB χρησιμοποιήθηκαν τα ακόλουθα δεδομένα ανά έτος j=1, 2, 3, 4 και ανά περιοχή i=1, 2, 3

I	$w_i = \sum_{j=1}^{4} w_{ij}$	$\overline{X}_i = \frac{1}{w_i}\sum_{j=1}^{4} w_{ij}X_{ij}$	$\hat{v}_i = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{4} w_{ij}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2$	$w_i(\overline{X}_i - \overline{X})^2$
1	50	1,406	0,536	0,887
2	300	1,298	0,125	0,191
3	150	1,178	0,172	1,348

Να υπολογιστεί το ασφάλιστρο για την περιοχή 1.

(6 μονάδες)

β) Δίνονται οι ακόλουθες πληροφορίες για ένα χαρτοφυλάκιο:

- Ο αριθμός των αποζημιώσεων κατά τη διάρκεια του έτους ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο $\frac{100-p}{100}$,
- Η κατανομή του p είναι ομοιόμορφη στο διάστημα (0, 100]

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων 4 ετών, παρατηρήθηκαν συνολικά 5 ζημιές. Να βρεθεί η εκτίμηση Buhlmann για τον αναμενόμενο αριθμό των αποζημιώσεων της επόμενης περιόδου.

(4 μονάδες)

Ερώτημα 5

α) Ένα χαρτοφυλάκιο αποτελείται από δυο κατηγορίες συμβολαίων. Τα μισά από τα συμβόλαια ανήκουν στην κατηγορία I και τα υπόλοιπα μισά συμβόλαια ανήκουν στην κατηγορία II. Το πλήθος των συνολικών ετήσιων αποζημιώσεων της κατηγορίας I ακολουθεί κατανομή Poisson με σ.π.π. $\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ και λ=1 και το πλήθος των συνολικών ετήσιων αποζημιώσεων του κατηγορίας II ακολουθεί κατανομή Poisson με λ=2. Το ύψος των αποζημιώσεων σε κάθε κατηγορία μπορεί να λάβει ισοπίθανα τις τιμές 1, 2, ή 3.

(i) Να δείξετε ότι η πιθανότητα οι συνολικές ετήσιες αποζημιώσεις S ενός συμβολαίου από την κατηγορία I να είναι ύψους 2 ισούται με: $P(S = 2|\lambda = 1) = \frac{7}{18}e^{-1}$.

(ii) Να δείξετε ότι η πιθανότητα οι συνολικές ετήσιες αποζημιώσεις S ενός συμβολαίου από την κατηγορία II να είναι ύψους 2 ισούται με: $P(S = 2|\lambda = 2) = \frac{8}{9}e^{-2}$.

(iii) Χρησιμοποιώντας τα (i) και (ii) να δείξετε ότι η πιθανότητα οι συνολικές ετήσιες αποζημιώσεις S ενός συμβολαίου ανεξαρτήτως κατηγορίας να είναι ύψους 2 ισούται με:

$$P(S = 2) = \frac{7}{36}e^{-1} + \frac{4}{9}e^{-2}$$

(iv) Ένα συμβόλαιο επιλέγεται τυχαία και για το συμβόλαιο αυτό παρατηρήθηκαν συνολικές ετήσιες αποζημιώσεις S ύψους 2. Να βρεθεί η πιθανότητα το συμβόλαιο αυτό να ανήκει στην κατηγορία I: $P(\lambda = 1|S = 2)$.

(5 μονάδες)

β) Έστω $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$οι συνολικές αποζημιώσεις ενός χαρτοφυλακίου που περιγράφονται με μια κατανομή για τον αριθμό των ζημιών N και μια κατανομή για το ύψος των αποζημιώσεων X_i. Το χαρτοφυλάκιο αντασφαλίζεται με σύμβαση τύπου Excess of Loss με προτεραιότητα M, δηλαδή ο αντασφαλιστής για κάθε ζημιά με ύψος X>M επιβαρύνεται με το ποσό X-M.

(i) Να υπολογίσετε το καθαρό αντασφάλιστρο (αναμενόμενες αποζημιώσεις του αντασφαλιστή χωρίς επιβαρύνσεις) για την περίπτωση όπου E(N)=2, M=2 και X_i έχει κατανομή $f(x) = 4 * (1 + x)^{-5}$, x>0.

$$\left[\text{σημείωση: } E(\max(X - M, 0) = \int_0^\infty P(X - M > t)dt\right]$$

(ii) Να υπολογίσετε την ποσοστιαία αύξηση του καθαρού αντασφαλίστρου αν κάθε ζημιά ύψους X αυξάνεται λόγω πληθωρισμού σε1,02X χωρίς αλλαγή της προτεραιότητας M.

(5 μονάδες)