ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2013

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

13 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2013

ΑΠΟΓΕΥΜΑΤΙΝΗ ΕΞΕΤΑΣΗ (12 π.μ. – 2μ.μ.)

1) (4 μονάδες) Καταθέτουμε σε ένα λογαριασμό, στην αρχή κάθε έτους € 180.000 για 3 έτη. Από το λογαριασμό αυτό λαμβάνουμε, από την αρχή του 1ου έτους έως το τέλος του 25ου έτους, εισόδημα πληρωτέο συνεχώς (payable continuously), €25.000 το χρόνο, το οποίο αυξάνει με 6% κάθε χρόνο.

I) Ποιο το NPV της επένδυσης με i= 7%

II) Εάν με i = 7% το NPV είναι μηδέν, βρείτε το ποσοστό αύξησης του ετήσιου εισοδήματος

2) (7 βαθμοί)Έστω ομολογία με διάρκεια 2 έτη, τιμή αγοράς κατά την έκδοση ίση προς 105 μονάδες και $F = C = 100$ μονάδες.

I) Έστω ότι η ομολογία καταβάλλει για 1η φορά κουπόνι στο τέλος του 1ου έτους το οποίο μειώνεται κατά 1% για κάθε ένα από τα επόμενα 4 τρίμηνα έως ότου εξαγοράζεται η ομολογία. Εάν οι τιμές ομολογίας χωρίς τοκομερίδια (zero coupon bonds) με διάρκεια 1 έτος, 1 έτος και 1 τρίμηνο, 1 έτος και 2 τρίμηνα, 1 έτος και 3 τρίμηνα, 1 έτος και 4 τρίμηνα είναι αντίστοιχα: $P_{\frac{4}{4}}$ =0,9902 , $P_{\frac{5}{4}}$=0,7941, $P_{\frac{6}{4}}$=0,9547, $P_{\frac{7}{4}} = 0{,}9261$ και $P_{\frac{8}{4}}$=0,9804, να υπολογίσετε το κουπόνι στο τέλος του 1ου έτους.

II) Έστω ότι η ομολογία καταβάλλει σταθερό κουπόνι στο τέλος κάθε τριμήνου κατά την διάρκεια του 1ου έτους ενώ στην συνέχεια δεν καταβάλλει κουπόνι. Εάν $s_{\frac{1}{4}} = 0{,}02$, $s_{\frac{2}{4}} = 0{,}025$, $s_{\frac{3}{4}} = 0{,}03$, $s_{\frac{4}{4}} = 0{,}035$ τα επιτόκια τρέχουσας τοποθέτησης (spot rates) διάρκειας 1,2,3,4 τριμήνων αντίστοιχα, να υπολογίσετε το κουπόνι.

III) Έστω ότι η ομολογία καταβάλλει σταθερό κουπόνι στο τέλος κάθε τριμήνου καθ' όλη την διάρκεια της ομολογίας. Εάν $s_{\frac{1}{4}} = 0{,}02$, $s_{\frac{2}{4}} = 0{,}025$, $s_{\frac{3}{4}} = 0{,}03$, $s_{\frac{4}{4}} = 0{,}035$ τα επιτόκια τρέχουσας τοποθέτησης (spot rates) διάρκειας 1,2,3,4 τριμήνων αντίστοιχα και οι τιμές ομολογίας χωρίς τοκομερίδια (zero coupon bonds) με διάρκεια 1 έτος και 1 τρίμηνο, 1 έτος και 2 τρίμηνα, 1 έτος και 3 τρίμηνα, 1 έτος και 4 τρίμηνα είναι αντίστοιχα: $P_{\frac{5}{4}}$ =0,7941, $P_{\frac{6}{4}}$=0,9547, $P_{\frac{7}{4}} = 0{,}9261$, $P_{\frac{8}{4}}$=0,9804, να βρεθεί η απόδοση αρτίου (par yield) της εν λόγω ομολογίας.

IV) Έστω ότι η ομολογία καταβάλλει σταθερό κουπόνι στο τέλος κάθε τριμήνου καθ' όλη την διάρκεια της ομολογίας. Αν η απόδοση μετατρέψιμη τριμηνιαίως ($\dot{i}^{(4)}$) είναι 5%, να υπολογίσετε το κουπόνι.

V) Να υπολογίσετε το ποσό τόκου που περιέχεται στο 1ο και 4ο κουπόνι του ερωτήματος (IV).

VI) Να υπολογίσετε το ποσό κεφαλαίου που περιέχεται στο 2ο και 8ο κουπόνι του ερωτήματος (IV).

3) (5 βαθμοί)

α) Δώστε 2 τουλάχιστον τύπους για την ράντα $(\overline{D}\,\overline{a})_{\overline{n}|}$

β) Αποδείξτε την ισοδυναμία των παραπάνω τύπων

γ) Για την ράντα $(\overline{D}\,\overline{a})_{\overline{10}|}$ βρείτε το λόγο του συνολικού ποσού πληρωμής των 5 τελευταίων ετών προς το συνολικό ποσό πληρωμής των 5 πρώτων ετών

4) (5 βαθμοί) Ένα δάνειο κεφαλαίου (L) αποπληρώνεται με 20 ετήσιες καταβολές συνολικού ύψους 10.000 μονάδων. Το μισό κεφάλαιο $\frac{L}{2}$ του δανείου αποπληρώνεται με την τοκοχρεωλυτική μέθοδο και με ετήσιο επιτόκιο 4%.Για το υπόλοιπο μισό κεφάλαιο $\frac{L}{2}$ του δανείου, δίδονται:

Α. Το κεφάλαιο $\frac{L}{2}$ θα δημιουργηθεί με ετήσιες καταβολές στο τέλος κάθε έτους σε λογαριασμό Sinking Fund από τον οποίο ο δανειζόμενος κερδίζει τόκο προς ετήσιο επιτόκιο 3% και θα επιστραφεί στο τέλος της 20ετίας.

Β. Ο δανειζόμενος θα καταβάλλει τόκο επί του κεφαλαίου $\frac{L}{2}$ του δανείου προς ετήσιο επιτόκιο 6% στο τέλος κάθε έτους.

Ζητούνται:

Ι) Το συνολικό κεφάλαιο (L) του δανείου.

II) Το καθαρό ποσό τόκου (Net Amount of Interest) που θα καταβάλλει ένας άλλος δανειζόμενος, κατά την διάρκεια του 5ου έτους, ο οποίος δανείζεται κεφάλαιο (L) και το αποπληρώνει υπό τις συνθήκες Α. και Β. της Sinking Fund μεθόδου ανωτέρω.

III) Το καθαρό ποσό δανείου (Net Amount of Loan) στο τέλος του 10ου έτους για την περίπτωση δανείου κεφαλαίου (L) και υπό τις προϋποθέσεις του (II) ανωτέρω.

5) (5 βαθμοί) καταθέτει κάποιος σε λογαριασμό €1.000 ανά 4 έτη, κάνοντας συνολικά 4 πληρωμές. Η πρώτη πληρωμή γίνεται στο τέλος του 1ου έτους. Το επιτόκιο του λογαριασμού είναι i, ετήσιο αποτελεσματικό επιτόκιο. Ο τόκος που λαμβάνεται κάθε έτος επανεπενδύεται με επιτόκιο j ετήσιο αποτελεσματικό.

I) Βρείτε μια φόρμουλα (συναρτήσει των i, j, $s_{\overline{4}|j}$) του συνολικού ποσού που θα έχει συσσωρεύσει ο επενδυτής στο τέλος του 12ου έτους

II) Αν υποθέσουμε ότι η συνολική απόδοση που έχει η επένδυση αυτή (yield rate) είναι 10% κάθε χρόνο, πόσο θα είναι το συνολικό ποσό που θα έχει ο επενδυτής στο τέλος του 12ου έτους.

6) (4 βαθμοί)
I) Εάν στο πρότυπο Black-Scholes, S=K=1, r=0, T=1 και σ η πτητικότητα, να υπολογίσετε την τιμή $C = C(\sigma)$ ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς (call option) και την παράγωγο $\frac{\theta C}{\theta \sigma}$.

II) Εάν στο πρότυπο Black-Scholes, S=K, r=0, σ=1, T=1 και S η τιμή του υποκείμενου αξιογράφου, να υπολογίσετε την τιμή $P = P(S)$ ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης (put option) και την παράγωγο $\frac{\theta P}{\theta S}$.

7) (3 βαθμοί) Να δειχθεί ότι εάν η ένταση ανατοκισμού είναι $\delta_t = 2t$ για $0 \leq t \leq n$, μιας συνεχούς ράντας με ρυθμό πληρωμής f(t)=2t κάθε έτος, τότε το αποτελεσματικό επιτόκιο του 1ου έτους είναι ίσο με e. (όπου $e \approx 2.718$)

8) (5 μονάδες)

I) Να αναγράψετε και αποδείξετε την ισχύ της ισότητας put-call parity που συνδέει την τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς (call option) και ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης (put option) καθώς και να εξηγήσετε τα μεγέθη που την απαρτίζουν και τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες ισχύει.

II) Να αποδείξετε ότι η τιμή ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης (forward contract) την χρ. στιγμή t, επί ενός αξιογράφου αξίας S_t το οποίο παρέχει γνωστό εισόδημα με παρούσα αξία I, δίδεται από την σχέση: $F_t = (S_t - I)e^{r(T-t)}$, όπου r η ακίνδυνη ένταση ανατοκισμού και T-t η εναπομείνασα διάρκεια μέχρι την λήξη του συμβολαίου.

9) (4 μονάδες) Δίδονται τα επιτόκια πρόσω (forward rates): $f_1 = 0{,}03$, $f_2 = 0{,}035$ και $f_3 = 0{,}04$.

I) Έστω μια «μη παράλληλη» αύξηση των επιτοκίων πρόσω που τα καθιστά να έχουν τις τιμές $f'_1 = 0{,}035$, $f'_2 = 0{,}045$ και $f'_3 = 0{,}048$. Να δειχθεί ότι τα σημερινά επιτόκια για μονοετείς, διετείς και τριετείς τοποθετήσεις (spot rates) αυξάνονται προσεγγιστικά κατά 0,005, 0,00749 και 0,00766 αντίστοιχα.

II) Αν τα δοθέντα επιτόκια πρόσω f_1, f_2, f_3 υποστούν μια «παράλληλη» αύξηση κατά ε=0,005, να υπολογιστεί προσεγγιστικά η ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή μιας 3ετούς ομολογίας χωρίς κουπόνια (zero coupon bond).

10) (8 βαθμοί) Η αναμενόμενη ετήσια απόδοση για τη μετοχή Α είναι 20% και για τη μετοχή Β είναι 30%, η δε ακίνδυνη ετήσια απόδοση είναι 5%. Η αποτελεσματική μεθόριος της αγοράς έχει τη μορφή $\frac{x^2}{220} - \left(\frac{y-12}{8}\right)^2 = 1$, όπου x είναι η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου και y η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου. Η ευθεία που άγεται από το σημείο (0,5) εφάπτεται στην αποτελεσματική μεθόριο στο σημείο (22,52 , 21,14).

I) Να περιγράψετε, με τη βοήθεια γραφήματος, τη θεωρία του Markowitz για την επιλογή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου με συνδυασμό μόνο των μετοχών Α και Β.

II) Να υπολογίσετε τη σύσταση, την αναμενόμενη ετήσια απόδοση και την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου ελάχιστης διασποράς της αποτελεσματικής μεθορίου.

III) Να υπολογίσετε τη σύσταση, την αναμενόμενη ετήσια απόδοση και την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου που μεγιστοποιεί το δείκτη Sharpe.

IV) Να υπολογίσετε το ποσοστό του πλούτου ενός επενδυτή που θα επενδυθεί σε μετοχές ούτως ώστε να μεγιστοποιηθεί η ωφελιμότητα του $U = y - 2x^2$.