ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

6 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΑΠΟΓΕΥΜΑΤΙΝΗ ΕΞΕΤΑΣΗ (12 π.μ. – 2 π.μ.)

1. (8 μονάδες) Έστω μία μετοχή P με αναμενόμενη απόδοση R_P και τυπική απόκλιση σ_P και M το χαρτοφυλάκιο της αγοράς με αναμενόμενη απόδοση R_M και τυπική απόκλιση σ_M.

Ένας επενδυτής διαμορφώνει χαρτοφυλάκιο Λ, επενδύοντας το w μέρος του Λ στη μετοχή P και το υπόλοιπο 1-w μέρος στο M.

Η σχέση g που συνδέει την αναμενόμενη απόδοση $R_\Lambda(w)$ με το R_P και το R_M ως συνάρτηση του w είναι η ακόλουθη:

$$R_\Lambda(w) = g(R_P, R_M; w) = wR_P + (1-w)R_M$$

(I) Να γράψετε τη σχέση h που συνδέει την τυπική απόκλιση $\sigma_\Lambda(w)$ με το σ_P και το σ_M ως συνάρτηση του w, $\sigma_\Lambda(w) = h(\sigma_P, \sigma_M; w)$

(II) Να αποδείξετε ότι η κλίση στο σημείο M, της καμπύλης που συνδέει το $R_\Lambda(w)$ και το $\sigma_\Lambda(w)$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$\left.\frac{dR_\Lambda(w)}{d\sigma_\Lambda(w)}\right|_{w=0} = \frac{\left.dR_\Lambda(w)/dw\right|_{w=0}}{\left.d\sigma_\Lambda(w)/dw\right|_{w=0}} = \frac{(R_P - R_M)\sigma_M}{Cov(R_P, R_M) - \sigma_M^2}$$

(III) Να εξηγήσετε γιατί η κλίση της καμπύλης στο σημείο M, όπως υπολογίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα θα πρέπει να ισούται με την κλίση της ευθείας που διέρχεται από την ακίνδυνη απόδοση και το M (δηλαδή την κλίση της Capital Market Line -CML), δηλαδή $\left.\frac{dR_\Lambda(w)}{d\sigma_\Lambda(w)}\right|_{w=0} = \frac{R_M - R_f}{\sigma_M}$

(IV) Να λύσετε την εξίσωση του προηγούμενου ερωτήματος ως προς R_P και να ερμηνεύσετε τη λύση.

2. (4 βαθμοί) Τα $P_1 = 0{,}99673255$, $P_3 = 0{,}95432187$, $P_4 = 0{,}93258913$, είναι οι τιμές των ομολόγων δίχως τοκομερίδια (zero-coupon bonds) διάρκειας 1, 3 και 4 ετών αντίστοιχα. Ταυτόχρονα, ένα ομόλογο διάρκειας 4 ετών με ετήσια κουπόνια $r = 0{,}02$ και C=F=1, τιμάται προς 1,009988.

(i) Να βρεθεί η spot καμπύλη επιτοκίων

(ii) Να βρεθεί η forward καμπύλη επιτοκίων

(iii) Να βρεθεί το par yield που αντιστοιχεί στην δοθείσα διάρθρωση επιτοκίων

3. (4 μονάδες) Δίνεται ένταση ανατοκισμού $\delta_t = \dfrac{0.2t}{1+0.1t^2}$, t>0 για όλα τα έτη τοκοφορίας.

i) Να βρεθεί το αποτελεσματικό επιτόκιο του δευτέρου έτους, i_2

ii) Να υπολογίσετε την ένταση προεξόφλησης (force of discount) $\delta_t^{'}$

4. (4 βαθμοί) Αν η σ.π.π. της έντασης ανατοκισμού Δ ακολουθεί την κατανομή Γάμμα(α, β), να βρεθούν οι μαθηματικές ελπίδες: $E((1+I)^t), E(V^t), E(\overline{A}_{\overline{n}|})$

Δίνεται ότι για t < β ισχύει:

$$M_\Delta(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^a$$

Επίσης, να βρεθούν τα ισοδύναμα σταθερά επιτόκια δ_1 και δ_2 τα οποία θα οδηγήσουν στο t=10 σε “βέβαια συσσώρευση” ίση με $E((1+I)^{10})$ και στο t=0 σε “βέβαια προεξόφληση” ίση με $E(V^{10})$. (Δίνεται ότι: β > 10).

5. (4 μονάδες) Καταθέτουμε 1 μονάδα σε έναν τραπεζικό λογαριασμό Α στην αρχή κάθε έτους για 5 έτη με τόκο i. Στο τέλος κάθε έτους επανεπενδύουμε τον τόκο που προκύπτει σε τραπεζικό λογαριασμό Β με ένταση ανατοκισμού $\delta_t = \frac{1}{1+t}$. Στο τέλος των 5 ετών το συνολικό ποσό που έχουμε συσσωρεύσει από τους 2 λογαριασμούς είναι 7,13. Υπολογίστε το ετήσιο αποτελεσματικό επιτόκιο i του λογαριασμού Α.

6. (4 βαθμοί) Ένα δάνειο αποπληρώνεται με n-σταθερές ετήσιες τοκοχρεωλυτικές δόσεις ύψους 1. Ο δανειολήπτης ανοσοποιεί την υποχρέωση καταβολής των τοκοχρεωλυτικών δόσεων με δύο ποσά, x στο t=0 και y στο t=n. Να βρεθούν τα χ, y, η μέση διάρκεια $\overline{t}$, η κυρτότητα $\overline{t^2}$ των τοκοχρεωλυτικών δόσεων και η κυρτότητα των ποσών x και y.

7. (4 μονάδες) Επενδύουμε €100 στην αρχή του 1ου έτους για 4 έτη συνολικά. Για τα πρώτα 2 έτη ισχύει επιτόκιο προεξόφλησης d=20% και για τα 2 επόμενα ισχύει ένταση ανατοκισμού $\delta_t = \frac{2t}{t^2+8}$, 2<t≤4. Στο τέλος των 4 ετών το ποσό που έχουμε συσσωρεύσει είναι Α.

Το ίδιο ποσό Α συσσωρεύουμε εάν καταθέσουμε € 100 στο t=0 με ονομαστικό επιτόκιο 2 φορές μετατρέψιμο κατ' έτος $i^{(2)}$. Βρείτε το ποσό Α και το $i^{(2)}$.

8. (7 βαθμοί) (i) Στο τέλος κάθε περιόδου, η τιμή μιας μετοχής με σημερινή τιμή 1 θα γίνεται (u>1) ή (d<1) με u=1,5d. Η ακίνδυνη ένταση ανατοκισμού είναι $r = \ln \frac{7}{5} d$.

I. Να βρεθεί η κινδυνοουδέτερη πιθανότητα ανόδου (p) της μετοχής

II. Αν υποθέσουμε ότι d=0,8:

   a. Να υπολογιστεί αναλυτικά η σημερινή αξία (τιμή) ενός δικαιώματος αγοράς (call option) της μετοχής στο τέλος 4 περιόδων από σήμερα και με τιμή άσκησης του δικαιώματος K (Strike price) ίση προς 1,2

   b. Να υπολογιστεί αναλυτικά το ελάχιστο πλήθος (j_1) ανοδικών βημάτων που εξασφαλίζει στο εν λόγω δικαίωμα αγοράς θετική καταληκτική αξία

   c. Να αναγραφεί η ισότητα put - call parity και με την χρήση αυτής να βρεθεί η σημερινή αξία (τιμή) του αντίστοιχου δικαιώματος πώλησης (put option) της μετοχής

   d. Να υπολογιστεί αναλυτικά το μέγιστο πλήθος (j_2) καθοδικών βημάτων που εξασφαλίζει στο εν λόγω δικαίωμα πώλησης θετική καταληκτική αξία

9. (5 μονάδες) Δίνεται δάνειο € 15.000 με ονομαστικό επιτόκιο $i^{(4)}$ = 12%. Για την αποπληρωμή του δανείου γίνονται πληρωμές ύψους €800 στο τέλος κάθε εξαμήνου για όσο διάστημα χρειαστεί ώστε να αποπληρωθεί εντελώς το δάνειο.

Τρείς μήνες πριν την πληρωμή της 9ης δόσης οι όροι του δανείου αλλάζουν. Υπάρχει νέο ονομαστικό επιτόκιο $i^{(12)}$ = 9% . Επίσης οι πληρωμές θα γίνονται μηνιαία, θα είναι ύψους X και θα γίνουν συνολικά 30 πληρωμές ώστε να αποπληρωθεί το δάνειο. Η πρώτη πληρωμή θα γίνει την ίδια χρονική στιγμή που θα γινόταν και η πληρωμή της 9ης δόσης. Να υπολογίσετε το X

10. (3 βαθμοί) Ένα δάνειο διάρκειας 20 ετών αποπληρώνεται με ετήσιες τοκοχρεωλυτικές δόσεις ύψους 1000 μονάδων η κάθε μια και ετήσιο επιτόκιο 2,769175%. Ο δανειολήπτης έχει την δυνατότητα να επιταχύνει την αποπληρωμή του δανείου. Ωστόσο, για κάθε ποσό που καταβάλλει ο δανειολήπτης και το οποίο υπερβαίνει το ποσό των 1.000 μονάδων, υπάρχει "ποινή" 1% επί του υπερβάλλοντος ποσού των 1.000 μονάδων. Ο δανειολήπτης, στο τέλος του 10^{ου} έτους καταβάλλει το ποσό των 1.500 μονάδων και στο τέλος του 14^{ου} έτους το ποσό των 2.000 μονάδων. Να βρεθεί το ανεξόφλητο κεφάλαιο του δανείου στο τέλος του 15^{ου} έτους(αμέσως μετά την καταβολή της 15^{ης} δόσης)

11. (3 βαθμοί) Ένα κρατικό ομόλογο διάρκειας 10 ετών για το οποίο ισχύει F= C=1, προβλέπει την καταβολή ετήσιου κουπονιού r=0,0262 και έχει ετήσια απόδοση 5%. Μόλις καταβάλλεται το 5^{ο} κουπόνι, ανακοινώνεται αδυναμία πληρωμής όλων των επόμενων κουπονιών όσο και της αξίας εξαγοράς στην λήξη.

Ο ομολογιούχος δέχεται:

- παράταση της αρχικής διάρκειας του δανείου κατά 10έτη
- "κούρεμα" της αξίας εξαγοράς στην λήξη κατά 50%
- μη καταβολή του 6^{ου}, 7^{ου} 8^{ου}, 9^{ου} και 10^{ου} κουπονιού
- κανονική καταβολή του 11^{ου} έως και του 20^{ου} κουπονιού

Ποια η τιμή (αξία) P_5 του ομολόγου μόλις πριν την ανακοίνωση της ανωτέρω αδυναμίας πληρωμής και ποια η τιμή (αξία) $P_5^{'}$ του ομολόγου αμέσως μετά την ανακοίνωση των νέων όρων; Ποια η ποσοστιαία μείωση $\frac{P_5 - P_5^{'}}{P_5}$;