ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2005

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

25 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2005

ΠΡΩΙΝΗ ΕΞΕΤΑΣΗ (9–11 π.μ.)

1. Την 1/1, το υπόλοιπο ενός λογαριασμού είναι 2.700. Την 1/5, το υπόλοιπο έχει φθάσει 3.024 και γίνεται μια κατάθεση ύψους 810. Την 1/11, το υπόλοιπο έχει φθάσει 3.420 και γίνεται μια ανάληψη ύψους 1.134. Στο τέλος του έτους, το υπόλοιπο είναι πάλι 2.700. Να βρεθούν η εσωτερική απόδοση (IRR) και η χρονοσταθμισμένη απόδοση (TWRR) του λογαριασμού μεταξύ 1/1 και 31/12.

	IRR (%)	TWRR (%)
(Α)	10,62	16
(Β)	10,62	18
(Γ)	10,86	16
(Δ)	10,86	18
(Ε)	10,96	16

2. Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν;

I. $\frac{1}{d^{(\kappa)}} - \frac{1}{i^{(\kappa)}} = \frac{1}{\kappa}$

II. $\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n}{n}$

III. $i^{(\kappa)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta/\kappa)^n}{n!}$

(Α) Μόνον το I

(Β) Μόνον το II

(Γ) Μόνον τα I, II

(Δ) Μόνον τα I, III

(Ε) Μόνον τα II, III

3. Η ένταση ανατοκισμού είναι τ.μ. Δ με ροπογεννήτρια $M_{\Delta}(t)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} t^{\kappa}$. Να βρεθεί $E\left(\sqrt{1+I}\right)$ (I το επιτόκιο που αντιστοιχεί στη Δ).

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Γ) 1 (Δ) $\sqrt{2}$ (E) 2

4. Στην αρχή κάθε έτους και επί n έτη, ο Χ καταθέτει μια μονάδα σε λογαριασμό που αποδίδει επιτόκιο i. Στο τέλος κάθε έτους, ο Χ αποσύρει τους τόκους και τους τοποθετεί σε άλλο λογαριασμό με επιτόκιο $j = 2i$ για το οποίο ισχύει $\ddot{s}_{\overline{n}|j} = 2n$. Στο τέλος των n ετών, ο Χ κλείνει και τους δύο λογαριασμούς και τοποθετεί όλα τα ποσά σε νέο λογαριασμό με επιτόκιο κ τέτοιο ώστε $(1+\kappa)^n = 2n$. Τι ποσό θα περιέχει ο νέος αυτός λογαριασμός n χρόνια μετά το άνοιγμά του;

(Α) $3n^2$ (Β) $2n^2$ (Γ) n^2 (Δ) $3n$ (Ε) $2n$

5. $\lim_{\kappa\to\infty} \frac{1}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} v^{\frac{n}{\kappa}} =$

(A) $\frac{1}{i}$ (B) $\frac{1}{i^{(\kappa)}}$ (Γ) $\frac{1}{\delta}$ (Δ) $\frac{1}{d^{(\kappa)}}$ (E) $\frac{1}{d}$

6. Με επιτόκιο 4%, η διαφορά ανάμεσα στα αθροίσματα $\sum_{n=1}^{20} \ddot{a}_{\overline{n|}}$ και $\sum_{n=1}^{20} v^n \ddot{a}_{\overline{n|}}$ είναι

(Α) 166,6515 (Β) 101,0876 (Γ) 90,5939 (Δ) 65,5639 (Ε) 25,0300

7. Μια μετοχή αναμένεται να καταβάλει μερίσματα ίσα με 1 το πρώτο έτος, 2 το δεύτερο έτος, ..., 10 το δέκατο έτος και μετά 10 στο διηνεκές. Τα μερίσματα φορολογούνται 15% και ο επενδυτής αποβλέπει σε απόδοση που αντιστοιχεί σε προεξοφλητικό επιτόκιο $d = 0{,}05$. Πόσο μεγαλύτερη είναι η μέγιστη τιμή που θα δεχθεί να καταβάλει ο επενδυτής για αγορά της μετοχής αν λάβει υπόψη του όλα τα μερίσματα στο διηνεκές από τη μέγιστη τιμή που προκύπτει αν ο επενδυτής λάβει υπόψη του μόνον τα μερίσματα της πρώτης 20ετίας;

(Α) 57,90 (Β) 68,12 (Γ) 71,71 (Δ) 84,36 (Ε) 129,61

8. Έστω D_1 η μέση διάρκεια που συνδέεται με την παρούσα αξία $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa \upsilon^{\kappa}$ και D_2 η μέση διάρκεια που συνδέεται με την παρούσα αξία $\upsilon + 2\upsilon^2 + 3\upsilon^3$. Ποια η τιμή του επιτοκίου αν $D_1 - D_2 = \sqrt{3}$;

(Α) $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Β) $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ (Γ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (Δ) $\sqrt{3} - 1$ (Ε) $\sqrt{3}$

9. Δάνειο ύψους 1 εξοφλείται με 20 δόσεις ύψους $\frac{41}{400}$. Ο τόκος που περιέχεται στην t δόση είναι $\frac{t}{200}$, $t = 1, 2, ..., 20$. Να βρεθεί το επιτόκιο.

(Α) $\frac{6}{21}$ (Β) $\frac{6}{41}$ (Γ) $\frac{6}{51}$ (Δ) $\frac{6}{61}$ (Ε) $\frac{6}{81}$

10. Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν για το βήτα μιας μετοχής και για το συντελεστή συσχέτισης ρ μεταξύ της απόδοσης της μετοχής και της απόδοσης της αγοράς εν γένει;

I. Η $\beta \geq \rho$ ισχύει γενικά.

II. Η $\frac{\beta}{\rho} > 1$ ισχύει μόνον αν $\beta > 1$.

III. Ο λόγος $\frac{\beta}{\rho}$ είναι ανεξάρτητος από το μέγεθος της συνδιακύμανσης των δύο αποδόσεων.

(Α) Όλα (Β) Κανένα (Γ) Μόνον το I

(Δ) Μόνον το II (Ε) Μόνον το III

11. Με επιτόκιο 5%, τα ποσά 0,655912098 στο $t = 0$ και 0,344353851 στο $t = 1$ ανοσοποιούν υποχρέωση ίση με μια μονάδα στο $t = \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$. Ποια η χρονική στιγμή ε;

(Α) $\frac{1}{4}$ (Β) $\frac{1}{3}$ (Γ) $\frac{1}{2}$ (Δ) $\frac{2}{3}$ (Ε) $\frac{3}{4}$

12. Τα επιτόκια για μελλοντικές τοποθετήσεις διάρκειας ενός έτους (forward rates) f_t ικανοποιούν τη σχέση $1+f_t=\frac{20+t}{19+t}$, $t=1,2,\ldots$. Να βρεθεί η τιμή μιας 20ετούς ομολογίας με ονομαστική αξία 1, ετήσια τοκομερίδια $r=0{,}05$ και αξία στη λήξη 2.

(Α) $\frac{1}{20}+\sum_{t=21}^{39}\frac{1}{t}$ (Β) $\frac{3}{40}+\sum_{t=21}^{39}\frac{1}{t}$ (Γ) $\sum_{t=21}^{40}\frac{1}{t}$

(Δ) $\frac{1}{2}+\sum_{t=21}^{40}\frac{1}{t}$ (Ε) $1+\sum_{t=21}^{40}\frac{1}{t}$

13. Με επιτόκιο 5%, η χρηματορροή $\alpha_\kappa = 1$ τις άρτιες χρονικές στιγμές κ = 0, 2, 4, ... είναι ισοδύναμη με τη χρηματορροή $\alpha_\kappa = \varepsilon\kappa$ κατά τις περιττές χρονικές στιγμές κ = 1, 3, 5, ... Ποια η τιμή του ε;

(Α) 0,013749 (Β) 0,034512 (Γ) 0,051189 (Δ) 0,084134 (Ε) 0,105672

14. Οι αποδόσεις R_i μιας μετοχής και οι αποδόσεις R_M της αγοράς σε έξι διαδοχικές συνεδριάσεις του χρηματιστηρίου είναι

R_i	1	2	1	1	1	2
R_M	2	2	1	2	1	2

Ποιο το βήτα της μετοχής και ποιος ο συντελεστής συσχέτισης ρ μεταξύ των δύο αποδόσεων;

	β	ρ
(Α)	1/2	1/2
(Β)	1/2	2/3
(Γ)	2/3	1/2
(Δ)	2/3	2/3
(Ε)	3/2	2/3

15. 20ετές δάνειο ύψους 1 εξοφλείται με τη συνήθη χρεολυτική μέθοδο και με επιτόκιο για το οποίο ισχύουν $\alpha_{\overline{20|}} = 13{,}504209$ και $s_{\overline{20|}} = 30$. Ποια δόση του δανείου περιέχει κεφάλαιο 0,044077;

(Α) Η τρίτη (Β) Η έβδομη (Γ) Η όγδοη (Δ) Η δέκατη (Ε) Η ενδέκατη

16. Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν;

I. $\sum_{\kappa=1}^{n} \ddot{\alpha}_{\overline{\kappa|}} = \frac{n - \alpha_{\overline{n|}}}{i}$

II. $\int_{0}^{n} \bar{\alpha}_{\overline{t|}} dt = \left(\bar{D}\bar{\alpha}\right)_{\overline{n|}}$

III. $n\ddot{\alpha}_{\overline{n|}} - \sum_{\kappa=1}^{n-1} \ddot{\alpha}_{\overline{\kappa|}} = \left(I\ddot{\alpha}\right)_{\overline{n|}}$

(Α) Μόνον το I

(Β) Μόνον τα I, II

(Γ) Μόνον τα I, III

(Δ) Μόνον τα II, III

(Ε) Όλα

17. Για t = 1, 2, ..., n, τα επιτόκια για μελλοντικές τοποθετήσεις με ετήσια διάρκεια (forward rates) είναι $f_t = \frac{0,05}{0,95 + 0,05t}$. Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν;

I. Η καμπύλη αποδόσεων είναι αντεστραμμένη.

II. Το επιτόκιο για σημερινές τοποθετήσεις διάρκειας t ετών είναι $s_t = \sqrt[t]{1 + 0,05t} - 1$.

III. Η τιμή, t χρόνια από σήμερα (t = 1, 2, ..., n), μιας ομολογίας χωρίς τοκομερίδια που θα λήξει n χρόνια από σήμερα είναι ${}_tP_n = \frac{1 + 0,05t}{1 + 0,05n}$.

(Α) Μόνον το I (Β) Μόνον το II (Γ) Μόνον τα I, III

(Δ) Μόνον τα II, III (Ε) Όλα

18. Να βρεθούν το ονομαστικό επιτόκιο ${}_h j_t$ και το αποτελεσματικό επιτόκιο ${}_h i_t$ που αντιστοιχούν στο χρονικό διάστημα $[t,\ t+h]$ όταν η ανατοκιστική συνάρτηση είναι $C(t)=(1+t)^2$.

	${}_h j_t$	${}_h i_t$
(Α)	$\frac{2}{1+t}+\frac{h}{(1+t)^2}$	$\left(1+\frac{h}{1+t}\right)^{\frac{1}{h}}-1$
(Β)	$\frac{2}{1+t}+\frac{h}{(1+t)^2}$	$\left(1+\frac{h}{1+t}\right)^{\frac{2}{h}}-1$
(Γ)	$\frac{2t+h}{(1+t)^2}$	$\left(1+\frac{h}{1+t}\right)^{\frac{2}{h}}-1$
(Δ)	$\frac{2t+h}{(1+t)^2}$	$\left(1+\frac{h}{1+t}\right)^{h}-1$
(Ε)	$\frac{2ht+h^2}{(1+t)^2}$	$\left(1+\frac{h}{1+t}\right)^{2h}-1$

19. Οι τιμές των καταβολών μιας προκαταβαλλόμενης διηνεκούς ράντας επαναλαμβάνονται κάθε έξι χρόνια (εμφανίζουν δηλαδή μια "εξαετή περίοδο"). Οι έξι εν λόγω τιμές είναι 1, 2, 3, 3, 2, 1. Ποια η παρούσα αξία αυτής της ράντας;

(Α) $\left(\frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\right)\left(\frac{1+\upsilon^2}{1+\upsilon^3}\right)$ (Β) $(1+\upsilon)\left(\frac{1+\upsilon^2}{1+\upsilon^3}\right)$ (Γ) $\left(\frac{1}{1-\upsilon}\right)\left(\frac{1+\upsilon^2}{1+\upsilon^3}\right)$

(Δ) $\left(\frac{1}{1-\upsilon^2}\right)\left(\frac{1+\upsilon^2}{1+\upsilon^3}\right)$ (Ε) $\frac{1+\upsilon^2}{1+\upsilon^3}$

20. Με επιτόκιο 5% ισχύουν οι σχέσεις $\int_0^n f(t)u^t dt = 30$ και $\int_0^n t\, f(t)u^t dt = 180$ ($f(t)$ μια αυθαίρετη συνεχής χρηματορροή). Ποια θα είναι κατά προσέγγιση η ποσοστιαία μεταβολή στην παρούσα αξία της $f(t)$ αν το επιτόκιο μεταβληθεί από 5% σε 4,6%;

(Α) 1,87% (Β) 2,29% (Γ) 2,40% (Δ) 2,51% (Ε) 3,82%

21. Ένα δάνειο ύψους $\alpha_{\overline{n|}} + \frac{1}{2}$ εξοφλείται χρεολυτικά με ετήσιες δόσεις ίσες με 1. Ποιο είναι το ανεξόφλητο κεφάλαιο μετά την πληρωμή της υπ' αριθ. n δόσης;

(Α) $\frac{2}{s_{\overline{n|}}}$ (Β) $\frac{2}{\alpha_{\overline{n|}}}$ (Γ) $\frac{n}{2}i$ (Δ) $\frac{1}{2}(1+i)^n$ (Ε) $\frac{1}{2}\upsilon^n$

22. Τα επιτόκια για μονοετείς, διετείς και τριετείς τοποθετήσεις είναι $s_1 = 0{,}030$, $s_2 = 0{,}035$ και $s_3 = 0{,}040$. Ποια η απόδοση μέχρι τη λήξη (YTM) μιας τριετούς ομολογίας με τοκομερίδιο r = 0,05 και ποιο το αντίστοιχο τοκομερίδιο (par yield) για μια τριετή ομολογία αγορασμένη στο άρτιο;

	YTM	Par Yield
(Α)	3,968%	3,962%
(Β)	3,968%	3,974%
(Γ)	3,968%	3,982%
(Δ)	3,974%	3,962%
(Ε)	3,974%	3,982%

23. Ένα εξαμηνιαίο έντοκο γραμμάτιο του Δημοσίου με αξία στη λήξη 10.000 πωλείται προς 9.700. Ένα ετήσιο έντοκο γραμμάτιο με εξαμηνιαία κουπόνια ύψους 400 και αξία στη λήξη 10.000 πωλείται προς 10.000. Να βρεθεί η τρέχουσα εξαμηνιαία απόδοση (spot rate) s_1 και η απόδοση πρόσω (forward rate) f_2 για το δεύτερο εξάμηνο.

	s_1	f_2
(Α)	3,000%	5,050%
(Β)	3,046%	5,002%
(Γ)	3,093%	4,952%
(Δ)	3,093%	4,900%
(Ε)	3,186%	4,854%

24. Επενδυτής αγοράζει 18ετή ληξιπρόθεσμη ράντα καταβάλλοντας 245.000. Το ετήσιο έσοδο από τη ράντα αποδίδει 5% στον επενδυτή και ταυτόχρονα του επιτρέπει να ανακτήσει το τίμημα της ράντας στο τέλος της 18ετίας κάνοντας ίσες ετήσιες καταθέσεις σε λογαριασμό που αποδίδει 3,5%. Ποιο είναι το ετήσιο έσοδο (ετήσια δόση της ράντας);

(Α) 24.750 (Β) 22.250 (Γ) 21.750 (Δ) 20.250 (Ε) 18.750

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2005

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

25 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2005

ΑΠΟΓΕΥΜΑΤΙΝΗ ΕΞΕΤΑΣΗ (12μ. – 2μ.μ.)

1. (4 βαθμοί) Η ένταση ανατοκισμού Δ είναι κανονική τ.μ. με σ.π.π. $\frac{100}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{25}{2}(20\delta-1)^2}$. (i) Να υπολογισθεί η διασπορά του επιτοκίου I με τη βοήθεια της ροπογεννήτριας της Δ. (Υπόδειξη : $Var(I) = Var(e^{\Delta})$) (ii) Να γραφεί η σ.π.π. του επιτοκίου I. (iii) Με τη βοήθεια του (ii), να δειχθεί ότι $Pr(0{,}04 \le I \le 0{,}06) = Pr(-1{,}077928685 \le Z \le 0{,}826890812)$, όπου Z ~ N(0, 1).

2. (6 βαθμοί) Σε ένα χαρτοφυλάκιο 20ετών τίτλων κεφαλαιοποίησης με κεφάλαιο μία μονάδα, στο τέλος κάθε έτους κληρώνεται και εξοφλείται στο άρτιο το 1% των εν ισχύι τίτλων. Εξαγορές επιτρέπονται μόνο στο τέλος κάθε έτους και το ποσό που καταβάλλεται στις εξαγορές t έτους είναι $\frac{t}{20}$, $t = 1, 2, ..., 19$. Υπολογίζεται ότι κάθε έτος οι εξαγορές θα είναι 5% των εν ισχύι τίτλων. Όσοι τίτλοι δεν κληρωθούν και δεν εξαγορασθούν εξοφλούνται στο τέλος της 20ετίας. Να υπολογισθεί το ετήσιο καθαρό ασφάλιστρο ενός τίτλου με συντελεστή προεξόφλησης $\upsilon = \frac{45}{47}$.

3. (6 βαθμοί) Ένα χαρτοφυλάκιο πρόκειται να συγκροτηθεί από κλάσμα x, $0 < x < 1$, ενός αξιογράφου με μέση απόδοση 10 και διασπορά απόδοσης 4 και κλάσμα $1-x$ ενός αξιογράφου με απόδοση 8 και διασπορά απόδοσης 1. Οι αποδόσεις των δύο αξιογράφων είναι ασυσχέτιστες (ρ = 0). (i) Να δειχθεί ότι το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς επιτυγχάνεται όταν $x = \frac{1}{5}$ και ότι η ελάχιστη διασπορά είναι $\frac{4}{5}$ με αντίστοιχη μέση απόδοση 8,4. (ii) Να δειχθεί ότι η σχέση μεταξύ της μέσης απόδοσης μ=μ(x) και της διασποράς V=V(x) του χαρτοφυλακίου είναι $V = \frac{5}{4}\left(\mu - \frac{42}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}$. (iii) Αν ο επενδυτής ανέχεται διασπορά V = 2, να δειχθεί ότι η απόδοση που μπορεί να επιτευχθεί είναι $\mu = \frac{42 + 2\sqrt{6}}{5}$ και, για να επιτευχθεί, απαιτείται $x = \frac{1+\sqrt{6}}{5}$. (iv) Αν ο επενδυτής επιθυμεί απόδοση μ=9, να δειχθεί ότι η διασπορά που μπορεί να επιτευχθεί είναι $V = \frac{5}{4}$ και, για να επιτευχθεί, απαιτείται $x = \frac{1}{2}$.

4. (6 βαθμοί) Η σημερινή τιμή μιας μετοχής είναι 1 και μιας ακίνδυνης ομολογίας επίσης 1. Στο τέλος μιας περιόδου, η αξία της ομολογίας θα είναι $\frac{21}{20}$ ενώ η τιμή της μετοχής θα έχει ή ανέλθει στα $\frac{11}{10}$ ή κατέλθει στα $\frac{10}{11}$. Προκειμένου να τιμολογήσουμε ένα δικαίωμα προαιρετικής αγοράς (μιας option) της μετοχής στο τέλος της περιόδου και στην τιμή $\frac{9}{10}$, συγκροτούμε ένα ιδεατό ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από x μονάδες της μετοχής και από y μονάδες της ομολογίας. (i) Να δειχθεί ότι $x = 1$ και $y = -\frac{6}{7}$. (ii) Να δειχθεί ότι οι σχετικές κινδυνουδέτερες πιθανότητες είναι $p = \frac{31}{42}$, $q = \frac{11}{42}$ και ότι το τίμημα για την απόκτηση του δικαιώματος (η σημερινή αξία της option) είναι $C = \frac{1}{7}$.

5. (4 βαθμοί) Δάνειο ύψους $\alpha_{\overline{n|}}$ εξοφλείται χρεολυτικά με ετήσιες δόσεις ύψους 2 προκειμένου να εξοφληθεί σύντομα σε κ, $\kappa < n$, δόσεις. (i) Να δειχθεί ότι το απαιτούμενο πλήθος δόσεων είναι ο ελάχιστος ακέραιος που ικανοποιεί τη σχέση $\kappa \geq \frac{1}{\delta}\ln\frac{2}{1+\upsilon^n}$. (ii) Αν δάνειο ύψους $\alpha_{\overline{20|}}$ εξοφλείται ακριβώς σε 5 δόσεις (χωρίς δηλαδή να μένει, μετά την 5η δόση, κάποιο κλασματικό ανεξόφλητο υπόλοιπο), να δειχθεί ότι το επιτόκιο είναι $i = 12{,}964\%$. (iii) Ανεξάρτητα από την τιμή του επιτοκίου, το πλήθος των δόσεων δεν μπορεί να υπερβεί ένα συγκεκριμένο ακέραιο (που είναι βέβαια συνάρτηση του n). Ποιος είναι ο ακέραιος αυτός όταν n = 20;

6. (4 βαθμοί) Με το ίδιο τίμημα, ο Χ μπορεί να αποκτήσει μια επιχειρηματική δραστηριότητα που θα αποδώσει μια μονάδα σε καθεμιά από τις χρονικές στιγμές t = 1, 2, ..., 10 ή μια άλλη επιχειρηματική δραστηριότητα που θα αποδώσει 5 μονάδες στο t = 3 και 4 μονάδες στο t = 5. (i) Αν υποθέσουμε ότι η ρευστότητα δεν απασχολεί τον Χ και μοναδικό κριτήριο είναι η απόδοση, ποια δραστηριότητα θα επιλέξει ο Χ αν επιδιώκει απόδοση 5% και ποια δραστηριότητα θα επιλέξει αν απαιτεί απόδοση 12%; (Αιτιολογημένες απαντήσεις!) (ii) Ποιο είναι το επιτόκιο αν ο Χ είναι αδιάφορος απέναντι στις δύο δραστηριότητες;

7. (4 βαθμοί) Η ένταση ανατοκισμού είναι τ.μ. Δ με σ.π.π. $f(\delta)$ και ροπογεννήτρια $M_\Delta(t)$. Έστω τώρα $\overline{A}_{\overline{t|}}$ η τυχαία συνεχής ράντα που βασίζεται σε ένταση ανατοκισμού Δ. (i) Να δειχθεί ότι $E\left(\overline{A}_{\overline{t|}}\right) = \int_0^t M_\Delta(-s)ds$ και να βρεθεί η $E\left(\overline{A}_{\overline{t|}}\right)$ όταν $f(\delta) = e^{-\delta}$, $\delta \geq 0$. (ii) Να δειχθεί γενικά ότι $E\left(\overline{A}_{\overline{t|}}\right) = \int_0^t E\left(V^s\right)ds$, όπου V ο συντελεστής προεξόφλησης που αντιστοιχεί στην ένταση ανατοκισμού Δ (και εφόσον βέβαια υπάρχουν οι μαθηματικές ελπίδες). Να δειχθεί κατά συνέπεια ότι η γνωστή σχέση $\frac{d}{dt}\overline{\alpha}_{\overline{t|}} = \upsilon^t$ εκτείνεται και στις μαθηματικές ελπίδες, δηλαδή ότι ισχύει $\frac{d}{dt}E\left(\overline{A}_{\overline{t|}}\right) = E\left(V^t\right)$.

8. (4 βαθμοί) (i) Τα επιτόκια πρόσω (forward rates) είναι $f_1 = 0{,}040$, $f_2 = 0{,}045$, $f_3 = 0{,}050$. Έστω μια "μη παράλληλη" αύξηση των επιτοκίων αυτών σε $f_1' = 0{,}045$, $f_2' = 0{,}052$, $f_3' = 0{,}059$. Να δειχθεί ότι οι αντίστοιχες αυξήσεις στα σημερινά επιτόκια για μονοετείς, διετείς και τριετείς τοποθετήσεις (spot rates) είναι 0,005, 0,006 και 0,007. (ii) Να δειχθεί ότι γενικά η μεταβολή ε_3 στο spot rate για τριετείς τοποθετήσεις από μεταβολές $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ στα f_1, f_2, f_3 είναι περίπου

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{3}\left[(1+f_1)^{-\frac{2}{3}}(1+f_2)^{\frac{1}{3}}(1+f_3)^{\frac{1}{3}}\delta_1 + (1+f_1)^{\frac{1}{3}}(1+f_2)^{-\frac{2}{3}}(1+f_3)^{\frac{1}{3}}\delta_2 + (1+f_1)^{\frac{1}{3}}(1+f_2)^{\frac{1}{3}}(1+f_3)^{-\frac{2}{3}}\delta_3\right].$$

9. (6 βαθμοί) (i) Το υπόλοιπο ενός λογαριασμού στην αρχή του $1^{ου}$, $2^{ου}$, ..., $12^{ου}$ μήνα πριν από την οποιαδήποτε κίνηση (κατάθεση ή ανάληψη) είναι

Μήνας	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Υπόλοιπο	12	14	15	18	16	19	21	23	24	27	26	28

Οι κινήσεις του λογαριασμού είναι καταθέσεις ύψους 2 στην αρχή του $1^{ου}$, $3^{ου}$, $5^{ου}$, $7^{ου}$, $9^{ου}$ και $11^{ου}$ μήνα και αναλήψεις ύψους 1 στην αρχή του $2^{ου}$, $4^{ου}$, $6^{ου}$, $8^{ου}$, $10^{ου}$ και $12^{ου}$ μήνα. Το υπόλοιπο του λογαριασμού 31/12 είναι 30. Να δειχθεί ότι η εσωτερική απόδοση είναι 75% και η χρονοσταθμισμένη απόδοση είναι 78,24%. (ii) Οι κινήσεις του λογαριασμού παραμένουν όπως στο (i) (+2 και -1), το υπόλοιπο όμως (πριν από τις κινήσεις) στην αρχή του κ μήνα είναι A_κ, $\kappa = 1, 2, ..., 12$, και στις 31/12 A_{13}. Να δειχθεί ότι η εσωτερική απόδοση είναι $\dfrac{A_{13} - A_1 - 6}{A_1 + 4}$ και η χρονοσταθμισμένη απόδοση είναι $\dfrac{A_{13}}{A_1} \cdot \prod_{\kappa=1}^{6} \dfrac{A_{2\kappa}}{A_{2\kappa} - 1} \cdot \prod_{\kappa=1}^{6} \dfrac{A_{2\kappa-1}}{A_{2\kappa-1} + 2}$.

10. (6 βαθμοί) Να βρεθεί το επιτόκιο που καθιστά αληθή καθεμιά από τις ακόλουθες σχέσεις : (i) $\ddot{\alpha}_{\overline{20|}} - \alpha_{\overline{20|}} = 0{,}543613054$, (ii) $\ddot{\alpha}_{\overline{\infty|}} = 2\alpha_{\overline{10|}}$, (iii) $\dfrac{\ddot{s}_{\overline{20|}} - \ddot{s}_{\overline{10|}}}{\ddot{\alpha}_{\overline{20|}} - \ddot{\alpha}_{\overline{10|}}} = 3{,}485635013$, (iv) $\dfrac{\ddot{s}^{(\delta)}_{\overline{2n|}}}{\ddot{s}^{(2\delta)}_{\overline{n|}}} = \dfrac{41}{21}$ (δ ένταση ανατοκισμού), (v) $i = 2\delta$.