ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2004

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

28 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2004

ΠΡΩΙΝΗ ΕΞΕΤΑΣΗ (9–11 π.μ.)

1. Αν $\delta_t = \frac{1}{1+t}$, $t \geq 0$, να βρεθούν τα ${}_{\frac{1}{2}}i_0$ (αποτελεσματικό επιτόκιο στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{2}\right]$) και ${}_{\frac{1}{2}}j_0$ (ονομαστικό επιτόκιο στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{2}\right]$).

	${}_{\frac{1}{2}}i_0$	${}_{\frac{1}{2}}j_0$
(Α)	$\sqrt{3/2}-1$	$1/2$
(Β)	$\sqrt{3/2}-1$	1
(Γ)	$5/4$	$1/2$
(Δ)	$5/4$	1
(Ε)	$9/4$	1

2. Ένα κληροδότημα που θα καταβάλλει ετησίως μια μονάδα στο διηνεκές με αρχή τη χρονική στιγμή $t = 20$ αγοράζεται με 20 ετήσιες προκαταβλητέες δόσεις ύψους $\frac{t+1}{20}$, $t = 0, 1, ..., 19$. Ποια η τιμή του επιτοκίου;

(Α) 6,000% (Β) 6,104% (Γ) 6,218% (Δ) 6,453% (Ε) 6,756%

3. Αν ο συντελεστής προεξόφλησης είναι τ.μ. V ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0{,}94,\ 0{,}98]$, πόσο μεγαλύτερη είναι η $\mathrm{Var}(V+V^2)$ από το άθροισμα $\mathrm{Var}(V)+\mathrm{Var}(V^2)$;

(Α) $32\cdot 10^{-6}$ (Β) $64\cdot 10^{-6}$ (Γ) $128\cdot 10^{-6}$ (Δ) $256\cdot 10^{-6}$ (Ε) $512\cdot 10^{-6}$

4. Στην αρχή κάθε έτους, ο Χ καταθέτει μια μονάδα σε λογαριασμό με επιτόκιο i. Στο τέλος κάθε έτους, ο Χ αναλαμβάνει τους τόκους και τους επανεπενδύει σε άλλο λογαριασμό που κερδίζει απλό τόκο με επιτόκιο j. Στο τέλος n ετών, ποιο θα είναι το άθροισμα των υπολοίπων των δύο λογαριασμών;

(Α) $n+\frac{(n-1)n}{2}i+\frac{(n-1)n(n+1)}{6}ij$

(Β) $n+\frac{(n-1)n}{2}i+\frac{(n-1)n(n+1)}{3}ij$

(Γ) $n+\frac{n(n+1)}{2}i+\frac{(n-1)n(n+1)}{6}ij$

(Δ) $n+\frac{n(n+1)}{2}i+\frac{(n-1)n(n+1)}{3}ij$

(Ε) $n+\frac{n(n+1)}{2}i+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}ij$

5. Αν $\int_0^{\pi} e^{-\delta t}\sin t\,dt = \left(1+e^{-\pi\delta}\right)\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\sin t\,dt$, να βρεθεί ο λόγος του $\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\left|\sin t\right|dt$ προς το $\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\sin t\,dt$.

(Α) $\dfrac{e^{2\pi\delta}+1}{e^{2\pi\delta}-1}$ (Β) $\dfrac{e^{\pi\delta}+1}{e^{\pi\delta}-1}$ (Γ) $e^{2\pi\delta}+1$ (Δ) $e^{\pi\delta}+1$ (Ε) $e^{-\pi\delta}+1$

6. Τα επιτόκια πρόσω (forward rates) είναι $f_1 = 0{,}01$, $f_2 = 0{,}02$, $f_3 = 0{,}03$, $f_4 = 0{,}04$ και $f_5 = 0{,}05$. Στον υπολογισμό της αξίας ενός 5ετούς ομολόγου με ονομαστική αξία 1 και τοκομερίδιο $r = 0{,}05$, αντί της παραπάνω σωστής διάρθρωσης των επιτοκίων, χρησιμοποιείται χάριν ευκολίας επιτόκιο 3%. Ποια είναι η τάξη μεγέθους του σφάλματος (της διαφοράς) που προκύπτει στην τιμή της αξίας απ' αυτή την προσέγγιση;

(Α) $5 \cdot 10^{-5}$ (Β) $5 \cdot 10^{-4}$ (Γ) $5 \cdot 10^{-3}$ (Δ) $5 \cdot 10^{-2}$ (Ε) $5 \cdot 10^{-1}$

7. Αν η $\ddot{a}^{(4)}_{\overline{20|}}$ είναι ίση με 2/3 της $\ddot{a}^{(4)}_{\overline{\infty|}}$, να βρεθεί το επιτόκιο i και η αξία διηνεκούς προκαταβαλλόμενης ράντας που αναβάλλεται για 40 χρόνια και καταβάλλεται 4 φορές το χρόνο.

	i	${}_{40|}\ddot{a}^{(4)}_{\overline{\infty|}}$
(Α)	$2^{0,05}-1$	$\frac{1}{4\left(1-2^{-0,05}\right)}$
(Β)	$2^{0,05}-1$	$\frac{1}{16\left(1-2^{-0,0125}\right)}$
(Γ)	$3^{0,05}-1$	$\frac{1}{4\left(1-3^{-0,0125}\right)}$
(Δ)	$3^{0,05}-1$	$\frac{1}{9\left(1-3^{-0,05}\right)}$
(Ε)	$3^{0,05}-1$	$\frac{1}{36\left(1-3^{-0,0125}\right)}$

8. Αν $(\mathrm{I}\alpha)_{\overline{n|}}^{(\kappa)} = \sum_{t=1}^{n} t^{\kappa} \upsilon^{t}$, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$, ποιο από τα παρακάτω είναι η κυρτότητα (convexity) μιας ληξιπρόθεσμης προσωρινής ράντας με διάρκεια n;

(Α) $\dfrac{\upsilon^2}{(\mathrm{I}\alpha)_{\overline{n|}}^{(0)}} \left((\mathrm{I}\alpha)_{\overline{n|}}^{(1)}\right)^2$

(Β) $\dfrac{\upsilon^2}{(\mathrm{I}\alpha)_{\overline{n|}}^{(0)}} (\mathrm{I}\alpha)_{\overline{n|}}^{(2)}$

(Γ) $\dfrac{\upsilon^2}{(\mathrm{I}\alpha)_{\overline{n|}}^{(0)}} (\mathrm{I}\alpha)_{\overline{n|}}^{(1)} (\mathrm{I}\alpha)_{\overline{n|}}^{(2)}$

(Δ) $\dfrac{\upsilon^2}{(\mathrm{I}\alpha)_{\overline{n|}}^{(0)}} \left[(\mathrm{I}\alpha)_{\overline{n|}}^{(1)} + (\mathrm{I}\alpha)_{\overline{n|}}^{(2)}\right]$

(Ε) $\dfrac{\upsilon^2}{(\mathrm{I}\alpha)_{\overline{n|}}^{(0)}} \left[(\mathrm{I}\alpha)_{\overline{n|}}^{(2)} - \left((\mathrm{I}\alpha)_{\overline{n|}}^{(1)}\right)^2\right]$

9. Αν η ένταση ανατοκισμού είναι τ.μ. Δ με σ.π.π. $f_{\Delta}(\delta) = \frac{100}{3} e^{-\frac{100}{3}\delta}$, $\delta \geq 0$, και $E\left(A_{\overline{2|}}\right) = E\left(e^{-\Delta} + e^{-2\Delta}\right)$, να βρεθεί η σταθερή ένταση ανατοκισμού δ_1 για την οποία ισχύει $\alpha_{\overline{2|}}^{(\delta_1)} = E\left(A_{\overline{2|}}\right)$.

(Α) 0,02928 (Β) 0,02956 (Γ) 0,02971 (Δ) 0,03015 (Ε) 0,03279

10. Αν η διασπορά της απόδοσης μιας μετοχής είναι διπλάσια της διασποράς της απόδοσης του συνόλου της αγοράς, ο δε συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των δύο αποδόσεων είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ποια η τιμή του συντελεστή βήτα της μετοχής;

(Α) $\frac{4}{5}$ (Β) $\frac{5}{6}$ (Γ) 1 (Δ) $\frac{6}{5}$ (Ε) $\frac{5}{4}$

11. Δάνειο ύψους L αποπληρώνεται χρεολυτικά με 15 δόσεις, 6 ύψους 500 στην αρχή και 9 ύψους 1.000 στη συνέχεια. Ποιο το κεφάλαιο που περιέχεται στην 6η δόση;

(A) $(500 - i)(1+i)^5$

(B) $500\left(1 - 2\,i\,\alpha_{\overline{10|}}\right)$

(Γ) $500\left(2\upsilon^{10} - \upsilon\right)$

(Δ) $(1.000 - Li)(1+i)^5$

(E) $1.000\left[1 - i\left(2\alpha_{\overline{10|}} - \upsilon\right)\right]$

12. Έστω μια "μη παράλληλη" μεταβολή στα μελλοντικά επιτόκια για μονοετείς τοποθετήσεις από f_1 σε $f_1+\varepsilon_1$ και από f_2 σε $f_2+\varepsilon_2$ και έστω $s_2+\varepsilon$ η αντίστοιχη μεταβολή στο σημερινό επιτόκιο s_2 για μια άμεση διετή τοποθέτηση. Αν αγνοήσουμε "όρους δέυτερης τάξης", ποιο από τα παρακάτω είναι η σωστή προσέγγιση για το ε;

(Α) $\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ (Β) $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ (Γ) $\frac{1}{2}\left[\varepsilon_1\sqrt{1+f_1}+\varepsilon_2\sqrt{1+f_2}\right]$

(Δ) $\frac{1}{2}\left[\varepsilon_1\sqrt{1+f_2}+\varepsilon_2\sqrt{1+f_1}\right]$ (Ε) $\frac{1}{2}\left[\varepsilon_1\sqrt{\frac{1+f_2}{1+f_1}}+\varepsilon_2\sqrt{\frac{1+f_1}{1+f_2}}\right]$

13. Στο τέλος μιας χρονικής περιόδου, η τιμή μιας μετοχής με σημερινή τιμή 1 θα είναι ή $\frac{107}{100}$ ή $\frac{100}{107}$. Ομόλογα με ακίνδυνη απόδοση $r = 0{,}05$ έχουν επίσης τρέχουσα τιμή 1. Να βρεθούν οι τιμές των κινδυνουδέτερων πιθανοτήτων που συνδέονται με τα παραπάνω δεδομένα.

(Α) $\frac{1235}{1449}$ και $\frac{214}{1449}$ (Β) $\frac{1128}{1449}$ και $\frac{321}{1449}$ (Γ) $\frac{1021}{1449}$ και $\frac{428}{1449}$

(Δ) $\frac{914}{1449}$ και $\frac{535}{1449}$ (Ε) $\frac{807}{1449}$ και $\frac{642}{1449}$

14. (Το ερώτημα αυτό αποτελεί συνέχεια του 13.) Αν ένα άτομο αγοράσει σήμερα το δικαίωμα (option) αγοράς της μετοχής στο τέλος της περιόδου στη σημερινή τιμή 1, τι τίμημα πρέπει να καταβάλει;

(Α) $\frac{200}{4347}$ (Β) $\frac{1}{21}$ (Γ) $\frac{80}{1449}$ (Δ) $\frac{247}{4347}$ (Ε) $\frac{41}{621}$

15. Δικαίωμα προαιρετικής αγοράς (option) πρόκειται να τιμολογηθεί με βάση το πρότυπο Black-Scholes. Αν η σημερινή αξία της μετοχής είναι 1, η τιμή άσκησης του δικαιώματος είναι επίσης 1, ο χρόνος άσκησης του δικαιώματος είναι t = 1 και $\sigma^2 = 0{,}000256$, να βρεθεί η διαφορά $d_1 - d_2$ μεταξύ των δύο ποσοστημορίων της N(0, 1) (των δύο τετμημένων της σ.π.π. της N(0, 1)) που θα χρησιμοποιηθούν για την τιμολόγηση.

(Α) 0,032 (Β) 0,016 (Γ) 0,008 (Δ) 0,000256 (Ε) 0,000128

16. Να βρεθεί η αξία διηνεκούς ράντας που τη χρονική στιγμή $12\kappa + t$, όπου κ = 0, 1, 2, ... και $t = 1, 2, ..., 12$, καταβάλλει το ποσό t.

(Α) $\dfrac{1}{i\alpha_{\overline{12|}}}$ (Β) $\dfrac{(I\alpha)_{\overline{12|}}}{\alpha_{\overline{12|}}}$ (Γ) $\dfrac{(I\alpha)_{\overline{12|}}}{i\alpha_{\overline{12|}}}$ (Δ) $\dfrac{1}{is_{\overline{12|}}}$ (Ε) $\dfrac{1}{i}s_{\overline{12|}}$

17. Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν;

I. $\ddot{s}_{\overline{n|}} - \ddot{\alpha}_{\overline{n|}} = d\ddot{s}_{\overline{n|}}\ddot{\alpha}_{\overline{n|}}$ II. $\ddot{s}_{\overline{2n|}} - \ddot{\alpha}_{\overline{2n|}} = d\left(\ddot{s}_{\overline{n|}} + \ddot{\alpha}_{\overline{n|}}\right)^2$ III. $\ddot{s}_{\overline{n|}}\ddot{\alpha}_{\overline{n|}} \geq n^2$

(Α) Μόνον το I (Β) Μόνον το II (Γ) Μόνον τα I, II (Δ) Μόνον τα I, III (Ε) Όλα

18. Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν;

I. $d^{(\kappa)} = 1 \Big/ \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{i^{(\kappa)}} \right)$ II. $\delta = \sum_{\kappa=1}^{\infty} (-1)^{\kappa+1} \frac{d^{(\kappa)}}{\kappa}$ III. $s_{\overline{n|}} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} i^j$

(A) Μόνον το I (B) Μόνον το II (Γ) Μόνον το III (Δ) Μόνον τα I, III (E) Όλα

19. Δάνειο ύψους $\alpha_{\overline{n|}}$ με επιτόκιο i εξοφλείται χρεολυτικά με n ίσες δόσεις. Ποια η παρούσα αξία με επιτόκιο j των τόκων που περιέχονται στις n δόσεις του δανείου;

(A) $\frac{\upsilon_i^n - \upsilon_j^n}{j-i}$ (B) $\alpha_{\overline{n|j}} - \frac{\upsilon_i^n - \upsilon_j^n}{j-i}$ (Γ) $\alpha_{\overline{n|i}} - \frac{\upsilon_i^n - \upsilon_j^n}{j-i}$ (Δ) $\frac{i}{j}\alpha_{\overline{n|i}}$ (E) $\frac{j}{i}\alpha_{\overline{n|i}}$

20. Αντί καταβολής της δόσης $\frac{1}{\alpha_{\overline{n}|}}$ για χρεολυτική εξόφληση δανείου ύψους 1, ο δανειολήπτης έχει την ευχέρεια να καταβάλλει τον ετήσιο τόκο i επί του συνολικού ύψους του δανείου και ταυτόχρονα να καταθέτει ετήσιες δόσεις σε λογαριασμό που κερδίζει επιτόκιο i' μεγαλύτερο από το επιτόκιο i του δανείου με στόχο τη συγκέντρωση του ποσού 1 για αποπληρωμή όλου του κεφαλαίου του δανείου στη λήξη (στο τέλος των n ετών). Ποιο είναι το ετήσιο όφελος του δανειολήπτη απέναντι στην περίπτωση που θα κατέβαλε τη χρεολυτική δόση $\frac{1}{\alpha_{\overline{n}|}}$;

(A) $\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} - \frac{1}{s_{\overline{n}|i'}}$ (B) $\frac{1}{\alpha_{\overline{n}|i'}} - \frac{1}{\alpha_{\overline{n}|i}}$ (Γ) $\frac{1}{\alpha_{\overline{n}|i}} - \frac{1}{s_{\overline{n}|i'}}$ (Δ) $\frac{1}{\alpha_{\overline{n}|i'}} - \frac{1}{s_{\overline{n}|i}}$ (E) $i' - i$

21. Η αξία μιας μετοχής είναι σήμερα 10 και αναμένεται να αυξηθεί με ετήσιο ρυθμό 5%. Η μετοχή θα πληρώσει ένα χρόνο από σήμερα μέρισμα ύψους 0,75 και το μέρισμα αναμένεται να αυξηθεί με ετήσιο ρυθμό 10%. Τα μερίσματα φορολογούνται 10% και τα κέρδη κεφαλαίου (υπεραξίες) 30%. Αν ένα άτομο σκοπεύει να πωλήσει τη μετοχή στο τέλος 5 ετών (έχοντας πρώτα εισπράξει και το μέρισμα πέμπτου έτους) και επιθυμεί να έχει απόδοση 12%, ποια είναι η μέγιστη τιμή που θα είναι διατεθειμένο να καταβάλει για να αγοράσει τη μετοχή;

(Α) 10,17 (Β) 9,82 (Γ) 9,68 (Δ) 9,53 (Ε) 8,72

22. Εάν $\delta_t = p + \frac{s}{1 + re^{st}}$, τότε $\bar{\alpha}_{\overline{n|}} =$

(A) $\frac{1 - e^{-pn}}{p}$

(B) $\frac{1 - e^{-(p+s)n}}{p + s}$

(Γ) $\frac{1 - e^{-(p+s)n}}{r}$

(Δ) $\frac{1 - e^{-(p+s)n}}{r(p + s)}$

(E) $\frac{1 - e^{-pn}}{p} + \frac{1 - e^{-(p+s)n}}{r(p + s)}$

23. Για την απόδοση R μιας μετοχής και για την απόδοση R_M της αγοράς συνολικά ισχύουν $E(R) = 0{,}1125$ και $Var(R_M) = 10^{-4}$. Ο συντελεστής μεταβλητότητας (: λόγος της τυπικής απόκλισης προς τον μέσο) της R είναι $\frac{1}{5}$ και ο συντελεστής βήτα της μετοχής είναι $\frac{3}{2}$. Να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης των R και R_M.

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) 0 (Γ) $\frac{1}{2}$ (Δ) $\frac{2}{3}$ (E) 1

24. Ποια η παρούσα αξία διηνεκούς προκαταβλητέας ράντας της οποίας οι πρώτες κ δόσεις είναι 1, οι επόμενες κ είναι 2, οι επόμενες κ είναι 3, κ.ο.κ.;

(Α) $\frac{1}{i^2 \ddot{\alpha}_{\overline{\kappa|}}}$ (Β) $\frac{1}{d^2 \ddot{\alpha}_{\overline{\kappa|}}}$ (Γ) $\frac{\ddot{\alpha}_{\overline{\kappa|}}}{i^2}$ (Δ) $\frac{\ddot{\alpha}^2_{\overline{\kappa|}}}{\alpha_{\overline{\kappa|}}}$ (Ε) $\left(\frac{\ddot{\alpha}_{\overline{\kappa|}}}{i}\right)^2$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2004

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

28 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2004

ΑΠΟΓΕΥΜΑΤΙΝΗ ΕΞΕΤΑΣΗ (12μ. – 2μ.μ.)

1. (4 βαθμοί) Τα σημερινά επιτόκια (spot rates) για τοποθετήσεις ενός, δύο και τριών ετών είναι αντίστοιχα $s_1 = 0{,}040$, $s_2 = 0{,}045$ και $s_3 = 0{,}050$. (i) Να βρεθούν τα αντίστοιχα επιτόκια πρόσω (forward rates). (ii) Μια ομολογία με C = F = 100 και τοκομερίδιο r = 0,05 αγοράζεται προς P = 97. Να βρεθεί η απόδοση του αγοραστή (αν κρατήσει την ομολογία μέχρι τη λήξη της). (iii) Να βρεθεί το par yield που αντιστοιχεί στη δοθείσα διάρθρωση των επιτοκίων. (iv) Να δειχθεί ότι η απόδοση μιας διετούς ομολογίας με C = F = 1 και τοκομερίδιο r που αγοράζεται προς P είναι $i = \dfrac{\sqrt{4P(1+r)+r^2} - (2P - r)}{2P}$.

2. (8 βαθμοί) Ένας ειδικός τίτλος κεφαλαιοποίησης με 20ετή διάρκεια καταβάλλει μια μονάδα στο τέλος 10 ετών και δύο μονάδες στο τέλος 20 ετών. (i) Να βρεθεί το ετήσιο καθαρό ασφάλιστρο. (ii) Να γραφεί το μαθηματικό απόθεμα για τον τίτλο και προοπτικά και ανασκοπικά τόσο για $0 \le t \le 9$ όσο και για $11 \le t \le 20$. (iii) Ποιο το απόθεμα στο τέλος του 10ου έτους μια στιγμή πριν από την καταβολή της μονάδας, ποιο το απόθεμα μια στιγμή μετά την καταβολή της μονάδας αλλά πριν από την πληρωμή του 11ου ασφαλίστρου και ποιο το απόθεμα μια στιγμή μετά την πληρωμή του 11ου ασφαλίστρου;

3. (4 βαθμοί) Το επιτόκιο I που θα ισχύσει τα επόμενα 10 χρόνια είναι τ.μ. με σ.π. Pr(I=0,07)=0,3, Pr(I = 0,08) = 0,2, Pr(I = 0,10) = 0,5. (i) Τι ποσό πρέπει να επενδυθεί σήμερα ώστε η συσσώρευση που αναμένεται στο τέλος της 10ετίας να είναι 1.000; (ii) Τι ποσό πρέπει να επενδυθεί σήμερα ώστε η συσσωρευμένη αξία στο τέλος της 10ετίας με επιτόκιο ίσο προς το αναμενόμενο να είναι 1.000; (iii) Ποια η τιμή της $\mathrm{Var}\left((1+I)^{10}\right)$;

4. (8 βαθμοί) Σε μια αγορά, τα χωρίς τοκομερίδιο ομόλογα διάρκειας t, t = 1, 2, …, n, τιμώνται $P_t = \dfrac{25}{25+t}$. (i) Να εκφρασθούν ως συνάρτηση της διάρκειας t τα επιτόκια s_t (spot rates) που έπονται από τις παραπάνω τιμές. (ii) Να εκφρασθούν κατά τον ίδιο τρόπο τα αντίστοιχα f_t (forward rates). (iii) Να διερευνηθεί η καμπύλη αποδόσεων (yield curve) προκειμένου να διαπιστωθεί αν είναι αντεστραμμένη ή όχι. Ποιο το σχετικό μέγεθος των s_t και f_t; (iv) Να γραφεί τύπος για τον υπολογισμό της τιμής ομολόγου διάρκειας m ($m \le n$) με F = C = 1 και τοκομερίδια r. (v) Να γραφεί τύπος για τον υπολογισμό του par yield του ομολόγου στο (iv). (vi) Να βρεθεί η απόδοση διετούς ομολόγου με F = 1, C = 1,1, r = 0,04, το οποίο αγοράζεται προς P = 1,0721 (και κρατείται μέχρι τη λήξη).

5. (8 βαθμοί) (α) Δίδεται $\varphi(\delta) = \sum \alpha_t e^{-\delta t}$. (i) Να δείξετε ότι η ποσοστιαία μεταβολή $\dfrac{\Delta\varphi}{\varphi}$ στη φ η οφειλόμενη σε μικρή μεταβολή Δδ της έντασης ανατοκισμού είναι προσεγγιστικά $\left|(\Delta\delta)\bar{t}\right|$, όπου $\bar{t}$ η μέση διάρκεια της χρηματορροής $\sum \alpha_t e^{-\delta t}$. (ii) Εφαρμόζοντας το (i) στην $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$, να δείξετε ότι η αύξηση του επιτοκίου από 4% σε 4,2% μειώνει την αξία της $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$ κατά περίπου 4,80%. Πώς συγκρίνεται αυτή η προσέγγιση με την πραγματική ποσοστιαία διαφορά μεταξύ της $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$ προς 4% και της $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$ προς 4,2%;

(β) Τα $\ddot{a}_{\overline{10}|}$ και $\ddot{a}_{\overline{20}|}$ έχουν υπολογισθεί με 5%. Αν μια μικρή διατάραξη του επιτοκίου από 5% σε (5+ε)% οδηγεί σε μεταβολή της τιμής της $\ddot{a}_{\overline{10}|}$ κατά περίπου 1,3%, να δείξετε ότι η ίδια διατάραξη της τιμής του i επηρεάζει την τιμή της $\ddot{a}_{\overline{20}|}$ κατά περίπου 2,5% και ότι το ε είναι περίπου 0,33.

(γ) Μια υποχρέωση ύψους 2 στο t έχει την ίδια παρούσα αξία και την ίδια διάρκεια με δύο στοιχεία $\dfrac{1}{x}$ στο t–ε και x στο t+ε. Ο μέσος των τετραγώνων $(t-\varepsilon)^2$ και $(t+\varepsilon)^2$ είναι ίσος με $t^2 + 10^{-4}$. Να δειχθεί ότι ε = 0,01 και δ = –100 lnx.

6. (6 βαθμοί) Δάνειο ύψους $\alpha_{\overline{n|}}$ εξοφλείται με n ίσες δόσεις. Οι συνολικοί τόκοι που θα πληρωθούν είναι (όπως και στην κλασσική χρεολυτική μέθοδο) $n-\alpha_{\overline{n|}}$, με τη διαφορά ότι εδώ κάθε δόση περιέχει το ίδιο ποσό τόκου. (i) Να δειχθεί ότι η απόδοση για το δανειστή είναι $i=\dfrac{n-\alpha_{\overline{n|}}}{\frac{n+1}{2}\alpha_{\overline{n|}}}$ και ότι, αν $n>1$, η απόδοση αυτή είναι ευνοϊκότερη από την απόδοση του δανειστή με τη χρεολυτική μέθοδο αν $n\left(\dfrac{1+\upsilon^n}{1-\upsilon^n}\right)>\dfrac{1+\upsilon}{1-\upsilon}$. (ii) Για το ίδιο δάνειο, αν το σύνολο των τόκων που θα καταβληθούν παραμένει $n-\alpha_{\overline{n|}}$, αλλά ο τόκος σε κάθε δόση φθίνει γραμμικά από nβ σε β, να δειχθεί ότι $i=\dfrac{6\left(n-\alpha_{\overline{n|}}\right)}{2(n+2)\alpha_{\overline{n|}}+(n-1)n}$. (iii) Να δειχθεί ότι η απόδοση που προκύπτει από το (ii) όταν n = 1 συμπίπτει με την απόδοση της χρεολυτικής μεθόδου και ότι η διαφορά μεταξύ των δύο αποδόσεων όταν n = 2 είναι μικρότερη κατά πολύ από το d^2.

7. (6 βαθμοί) Έστω σειρά n ομολογιών με F=C=1, τοκομερίδιο r και κλιμακωτή λήξη κ = 1, 2, ..., n. (i) Να δειχθεί ότι η συνολική αξία της σειράς είναι $\sum_{\kappa=1}^{n}\left[1+(n-\kappa+1)r\right]\prod_{j=1}^{\kappa}\left(1+f_j\right)^{-1}$. (ii) Να δειχθεί ότι, με "επίπεδη διάρθρωση των επιτοκίων" (flat yield curve), το (i) ανάγεται σε $n\left(\dfrac{r}{i}\right)+(i-r)\alpha_{\overline{n|}}$ και, σε περίπτωση που i = r, απλά σε n. (iii) Έστω σειρά ομολογιών με n = 3 και διάρθρωση των επιτοκίων $1+f_j=\dfrac{25+j}{24+j}$, $j=1,2,3$. Αν $\dfrac{1}{26}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{28}=\dfrac{1093}{9828}$ και $\dfrac{3}{26}+\dfrac{2}{27}+\dfrac{1}{28}=\dfrac{2213}{9828}$, να δειχθεί ότι η αξία της σειράς είναι $\dfrac{25}{9828}(1093+2213r)$.

8. (6 βαθμοί) (i) Να περιγράψετε το πρότυπο Black-Scholes για την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαιρετικής αγοράς (option pricing), ορίζοντας με πληρότητα και σαφήνεια κάθε αναγκαίο όρο και κάθε αναγκαίο σύμβολο. (ii) Το πρότυπο Black-Scholes ισχύει υπό προϋποθέσεις. Να απαριθμήσετε αυτές τις προϋποθέσεις. (iii) Να εξηγήσετε με ακρίβεια την έννοια της αντιστάθμισης του κινδύνου (hedging) και την αρχή της αδυναμίας αποκόμισης ακίνδυνου κέρδους (no arbitrage principle) και να δώσετε κατάλληλα παραδείγματα.