1. Αν $(1+i)^{1/4} = x$, $\dfrac{i^{(4)} + d^{(4)}}{i^{(2)} + d^{(2)}} =$

(Α) $\dfrac{1+x}{1-x}$ (Β) $\dfrac{x}{x^2+1}$ (Γ) $\dfrac{2x}{x^2+1}$ (Δ) $\dfrac{2x}{(1+x)^2}$ (Ε) $\dfrac{x^2+1}{2x}$

2. Δάνειο ύψους 2 εξοφλείται με τρεις ληξιπρόθεσμες δόσεις 1, 1–α και 1–2α. Το ποσό τόκου σε κάθε δόση είναι σταθερό και ίσο με β. Να βρεθούν τα α και β και το επιτόκιο.

	α	β	i
(Α)	$\frac{3}{42}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{1}{10}$
(Β)	$\frac{3}{42}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{1}{5}$
(Γ)	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{1}{10}$
(Δ)	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{5}$
(Ε)	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{1}{10}$

3. Μια μετοχή καταβάλλει μερίσματα στο τέλος των ετών 1, 2, ..., 10 ίσα με 5% της τιμής στην οποία αγοράσθηκε. Στο τέλος της 10ετίας ο αγοραστής πωλεί την μετοχή στο διπλάσιο της τιμής αγοράς. Αν τα μερίσματα φορολογούνται 15% και τα κέρδη κεφαλαίου 30%, τι απέδωσε η μετοχή στον αγοραστή με βάση τα καθαρά εισοδήματά του από αυτήν;

(Α) 8,38% (Β) 8,75% (Γ) 8,88% (Δ) 8,95% (Ε) 9,02%

4. $\ddot{\alpha}_{\overline{\infty|}} - \ddot{\alpha}^{(2)}_{\overline{\infty|}} =$

(A) $\frac{1}{2\left(1+\sqrt{\upsilon}\right)}$ (B) $\frac{1}{2(1+\upsilon)}$ (Γ) $\frac{1}{2}$ (Δ) $\frac{1}{1+\sqrt{\upsilon}}$ (E) $\frac{1}{1+\upsilon}$

5. Το επιτόκιο I είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο (0,015, 0,045). Να βρεθεί $E\left(\ddot{s}_{\overline{20|}}\right)$.

(A) 26,0877 (B) 26,4752 (Γ) 26,8704 (Δ) 27,2714 (E) 27,6765

6. Τα επιτόκια για μονοετείς, διετείς και τριετείς τοποθετήσεις είναι $s_1 = 0{,}030$, $s_2 = 0{,}035$ και $s_3 = 0{,}040$. Ποια η απόδοση μέχρι τη λήξη (YTM) μιας τριετούς ομολογίας με τοκομερίδιο r = 0,05 και ποιο το αντίστοιχο τοκομερίδιο (par yield) για μια τριετή ομολογία αγορασμένη στο άρτιο;

	YTM	Par Yield
(Α)	3,968%	3,962%
(Β)	3,968%	3,974%
(Γ)	3,968%	3,982%
(Δ)	3,974%	3,962%
(Ε)	3,974%	3,982%

7. Διηνεκής προκαταβλητέα ράντα ύψους 2d (d το προεξοφλητικό επιτόκιο) έχει την ίδια αξία με διηνεκή ράντα ύψους 1 καταβλητέα τις χρονικές στιγμές t = 10κ, κ = 1, 2, 3, ... Να βρεθεί το επιτόκιο.

(Α) $\sqrt[10]{\frac{3}{2}} - 1$ (Β) $\sqrt[10]{2} - 1$ (Γ) $\sqrt[10]{3} - 1$ (Δ) $e^{0,04} - 1$ (Ε) $e^{0,05} - 1$

8. Μια υποχρέωση ύψους 1 καταβλητέα στο t = 1 ανοσοποιείται με τοποθετήσεις Α με λήξη στο t = 1–ε και Β με λήξη στο t = 1+ε. Πόσο μεγαλύτερο από το 1 είναι το μέσο τετράγωνο $\overline{t^2}$ των χρονικών στιγμών t = 1–ε και t = 1+ε;

(Α) ε (Β) $\frac{1}{2}+\varepsilon$ (Γ) $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ (Δ) ε^2 (Ε) $2\varepsilon+\varepsilon^2$

9. Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν για τον κλασσικό χρεολυτικό τρόπο εξόφλησης δανείου ύψους 1;

I. Ο τόκος που περιέχεται στην t δόση είναι $\frac{(1+i)^{n+1}-(1+i)^{t}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$.

II. Το κεφάλαιο που περιέχεται στην t δόση είναι $\frac{(1+i)^{t}}{s_{\overline{n}|}}$.

III. Ο λόγος τόκου προς κεφάλαιο στην t δόση είναι $(1+i)^{n-t+1}-1$.

(Α) Μόνον το I (Β) Μόνον το II (Γ) Μόνον τα I, II

(Δ) Μόνον τα I, III (Ε) Μόνον τα II, III

10. Τα ετήσια επιτόκια για μελλοντικές τοποθετήσεις (forward rates) ικανοποιούν τη σχέση $f_{\kappa+1} = (\alpha - 1) + \alpha f_{\kappa}$, $\kappa = 1, 2, ..., n-1$. Να βρεθεί το α συναρτήσει των s_1 (επιτόκιο για σημερινές τοποθετήσεις ενός έτους) και s_n (επιτόκιο για σημερινές τοποθετήσεις διάρκειας n).

(A) $\left(\frac{1+s_n}{\sqrt[n]{1+s_1}}\right)^{\frac{1}{n}}$ (B) $\left(\frac{1+s_n}{1+s_1}\right)^{\frac{1}{n}}$ (Γ) $\left(\frac{1+s_n}{\sqrt[n]{1+s_1}}\right)^{\frac{2}{n-1}}$ (Δ) $\left(\frac{1+s_n}{1+s_1}\right)^{\frac{2}{n-1}}$ (E) $\frac{1+s_n}{\sqrt[n]{1+s_1}}$

11. Τα μελλοντικά μερίσματα από μια μετοχή είναι $D_t = (1+\kappa)^{t-1} D,\ t = 1, 2, \ldots, n$, και $D_t = (1+\kappa)^n D,\ t = n+1, n+2, \ldots$. Να βρεθεί η αξία της μετοχής βασισμένη στην αξία των μελλοντικών μερισμάτων και επιτόκιο i και η τιμή που παίρνει η αξία όταν i = κ.

(Α) $\frac{1}{\kappa - i}\left[\frac{\kappa}{i}\left(\frac{1+\kappa}{1+i}\right)^n - 1\right] D$ και $\left(\frac{n+1}{i}\right) D$

(Β) $\frac{1}{\kappa - i}\left[\frac{\kappa}{i}\left(\frac{1+\kappa}{1+i}\right)^n - 1\right] D$ και $\left(n + \frac{1}{i}\right) D$

(Γ) $\frac{1}{\kappa - i}\left[\frac{\kappa}{i}\left(\frac{1+\kappa}{1+i}\right)^n - 1\right] D$ και $\left(\frac{n}{1+i} + \frac{1}{i}\right) D$

(Δ) $\frac{1}{\kappa - i}\left[\left(\frac{1+\kappa}{1+i}\right)^n - 1\right] D$ και $\left(\frac{n+1}{i}\right) D$

(Ε) $\frac{1}{\kappa - i}\left[\left(\frac{1+\kappa}{1+i}\right)^n - 1\right] D$ και $\left(\frac{n}{1+i} + \frac{1}{i}\right) D$

12. Το επιτόκιο I έχει λογαριθμική κανονική σ.π.π. $f(i)=\frac{25}{1+i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-1250[\ln(1+i)-0,05]^2}$, $i\geq 0$. Αν Φ η σ.κ. της τυπικής κανονικής τ.μ., $\Pr\left(I\leq e^{0,09}-1\right)=$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$ (Γ) $\Phi(1)$ (Δ) $\Phi\left(\frac{3}{2}\right)$ (E) $\Phi(2)$

13. Δίδονται μετοχές με αποδόσεις R_i και R_j, πτητικότητες $\sqrt{V_i}$ και $\sqrt{V_j}$, συντελεστές συσχέτισης με την απόδοση R_M της αγοράς ρ_{iM} και ρ_{jM} και συντελεστές βήτα β_i και β_j. Αν $Cov(R_i, R_M) = -0{,}03$ και $Cov(R_j, R_M) = 0{,}02$, τότε $\dfrac{\beta_i\, \rho_{iM}\sqrt{V_i}}{\beta_j\, \rho_{jM}\sqrt{V_j}} =$

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{2}{3}$ (Γ) 1 (Δ) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{9}{4}$

14. Οι τ.μ. $X_1, X_2, X_3, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με $E(X) = \mu$ και $Var(X) = \sigma^2$. Ποιο από τα παρακάτω είναι ίσο με $Cov(X_1 \ldots X_\kappa,\ X_1 \ldots X_\kappa X_{\kappa+1} \ldots X_{2\kappa})$;

(A) $\mu^{2\kappa} \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{j} \left(\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)^j$

(B) $\mu^{3\kappa} \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{j} \left(\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)^j$

(Γ) $\sum_{j=1}^{\kappa} \binom{\kappa}{j} \left(\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)^j$

(Δ) $\mu^{2\kappa} \sum_{j=1}^{\kappa} \binom{\kappa}{j} \left(\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)^j$

(E) $\mu^{3\kappa} \sum_{j=1}^{\kappa} \binom{\kappa}{j} \left(\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)^j$

15. Οι αποδόσεις μιας μετοχής i και της αγοράς M σε τέσσερες περιόδους είναι

R_i	5	4	4	5
R_M	3	5	4	4

Να βρεθούν τα β_i και ρ_{iM}.

	β_i	ρ_{iM}
(A)	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
(B)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(Γ)	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$
(Δ)	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$
(E)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

16. Η ράντα Ι καταβάλλει το ποσό 2κ+1, κ = 1, 2, 3, ..., τη χρονική στιγμή 4κ και η ράντα ΙΙ καταβάλλει το ποσό $\left(3-\upsilon^4\right)\kappa^2$, $\kappa = 1, 2, 3, \ldots$, τη χρονική στιγμή 2κ. Να βρεθεί ο λόγος της παρούσας αξίας της ράντας Ι προς την παρούσα αξία της ράντας ΙΙ.

(Α) $\dfrac{\upsilon^2}{\left(1+\upsilon^2\right)^2}$ (Β) $\dfrac{1-\upsilon^2}{\left(1+\upsilon^2\right)^2}$ (Γ) $\dfrac{\upsilon^2\left(1-\upsilon^2\right)}{\left(1+\upsilon^2\right)^2}$ (Δ) $\dfrac{\upsilon^2\left(1-\upsilon^2\right)}{\left(1+\upsilon^2\right)^3}$ (Ε) $\dfrac{\upsilon^4\left(1-\upsilon^4\right)}{\left(1+\upsilon^2\right)^3}$

17. Έστω συνεχής διηνεκής μεταβλητή ράντα με καταβολή κάθε χρονική στιγμή t ίση με την τιμή της επίσης μεταβλητής έντασης ανατοκισμού $\delta_t = e^{-t}$. Να βρεθούν η παρούσα αξία της ράντας και η συσσωρευμένη αξία της στο ∞.

	ΠΑ	ΣΑ
(Α)	e^{-1}	1
(Β)	$1-e^{-1}$	e–1
(Γ)	1	e
(Δ)	$1-e^{-1}$	∞
(Ε)	1	∞

18. Αν $(1+i)^n = \alpha$, $\left(\dfrac{\ddot{s}_{\overline{n|}}\,\ddot{\alpha}_{\overline{n|}}}{\ddot{s}_{\overline{n|}} + \ddot{\alpha}_{\overline{n|}}}\right)d =$

(Α) $\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}$ (Β) $\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ (Γ) $\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^2$ (Δ) $\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha+1}$ (Ε) $\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2-1}$

19. Η απόδοση R_i της μετοχής i έχει $E(R_i) = 0{,}06$, πτητικότητα $\sigma_{R_i} = 0{,}01$ και δείκτη Treynor $\frac{1}{60}$. Η πτητικότητα της αγοράς είναι $\sigma_{R_M} = 0{,}005$ και η ακίνδυνη απόδοση είναι $r_F = 0{,}04$. Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν;

I. Το βήτα της μετοχής είναι 1,2.

II. Ο δείκτης Sharpe της μετοχής είναι 2.

III. Η συνδιακύμανση των αποδόσεων R_i και R_M είναι 0,012.

(Α) Μόνον το I (Β) Μόνον τα I, II (Γ) Μόνον τα I, III

(Δ) Μόνον τα II, III (Ε) Όλα

20. Ποιο από τα παρακάτω ΔΕΝ είναι σωστή σχέση μεταξύ των συναρτήσεων επιτοκίου i, d, υ και δ;

(A) $\delta = \sum_{\kappa=1}^{\infty} (-1)^{\kappa+1} \frac{i^{\kappa}}{\kappa}$

(B) $\upsilon = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^{\kappa} i^{\kappa}$

(Γ) $d = \sum_{\kappa=1}^{\infty} (-1)^{\kappa-1} i^{\kappa}$

(Δ) $i = \sum_{\kappa=0}^{\infty} d^{\kappa}$

(E) $i = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\delta^{\kappa}}{\kappa!}$

21. Τις χρονικές στιγμές t = 0, 1, 2, 3, ο Χ τοποθετεί μια μονάδα σε λογαριασμό που κερδίζει 4%. Τις χρονικές στιγμές t = 1, 2, 3, ο Χ αναλαμβάνει τους τόκους του λογαριασμού και τους τοποθετεί σε άλλο λογαριασμό που κερδίζει 3%. Με βάση το άθροισμα των ποσών που βρίσκονται στους δύο λογαριασμούς στο t = 4, ποια η απόδοση του Χ στο διάστημα $0 \leq t \leq 4$;

(Α) 3,96% (Β) 3,95% (Γ) 3,94% (Δ) 3,93% (Ε) 3,92%

22. Έστω δικαίωμα (option) αγοράς μετοχής στο τέλος δύο περιόδων από σήμερα. Η τιμή αγοράς της μετοχής που προβλέπει το δικαίωμα είναι 1 και η σημερινή τιμή της μετοχής είναι επίσης 1. Αν οι τιμές που μπορεί να έχει η μετοχή στο τέλος της περιόδου είναι u και $\frac{1}{u}$ και αν μια μονάδα επενδυμένη ακίνδυνα γίνεται r στο τέλος μιας περιόδου, ποιο από τα παρακάτω είναι η τιμή αγοράς του δικαιώματος;

(Α) $\frac{1}{u^2-1}\left(u-\frac{1}{r}\right)^2$ (Β) $\frac{1}{u^2-1}\left(u-\frac{1}{r}\right)$ (Γ) $\left(u-\frac{1}{r}\right)^2$ (Δ) $\frac{u}{r}-\frac{1}{r^2}$ (Ε) $u-\frac{1}{r}$

23. Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν για την $\alpha_{\overline{3|}}$ με επιτόκιο 4%;

I. Η μέση διάρκεια των καταβολών είναι 1,974.

II. Με βάση την τιμή της μέσης διάρκειας, η προσέγγιση για την αύξηση της $\alpha_{\overline{3|}}$ αν το επιτόκιο γίνει 3,9% είναι $5{,}267 \cdot 10^{-3}$.

III. Η πραγματική διαφορά $\alpha_{\overline{3|}}^{(0{,}039)} - \alpha_{\overline{3|}}^{(0{,}04)}$ είναι περίπου $5{,}275 \cdot 10^{-3}$.

(Α) Μόνον το I (Β) Μόνον το III (Γ) Μόνον τα I, III

(Δ) Μόνον τα II, III (Ε) Όλα

24. Δύο μήνες μετά την αγορά ενός (ευρωπαϊκού) δικαιώματος πώλησης μιας μετοχής στην τιμή $K = \frac{11}{10}$, η αξία του δικαιώματος είναι $\frac{1}{10}$. Την ίδια στιγμή, η τιμή της μετοχής είναι A = 1 και η τιμή μιας "ακίνδυνης" ομολογίας που λήγει ταυτόχρονα με το δικαίωμα είναι $\frac{21}{22}$. Ποια η αξία (την ίδια στιγμή) ενός δικαιώματος **αγοράς** της μετοχής τη στιγμή λήξης του δικαιώματος πώλησης και στην τιμή $K = \frac{11}{10}$;

(Α) $\frac{1}{21}$ (Β) $\frac{1}{20}$ (Γ) $\frac{1}{11}$ (Δ) $\frac{1}{10}$ (Ε) $\frac{3}{20}$

1. (4 βαθμοί) (i) Δίδονται $\sum_{t=1}^{\infty} f(t)\upsilon^t = \varphi(\upsilon)$, $f(0)=0$ και $g(t)=f(t)-f(t-1)$. Να δειχθεί ότι $\sum_{t=1}^{\infty} g(t)\upsilon^t = (1-\upsilon)\varphi(\upsilon)$. (ii) Δίδονται $\int_0^{\infty} f(t)e^{-\delta t}dt = \frac{2}{\delta^3} - \frac{3}{\delta^2}$ και $f(0)=0$. Να δειχθεί ότι $\int_0^{\infty} f'(t)e^{-\delta t}dt = \frac{2}{\delta^2} - \frac{3}{\delta}$. (iii) Να βρεθεί το άθροισμα $\sum_{t=1}^{\infty} t^2\upsilon^t$ δοθέντος ότι $\sum_{t=1}^{\infty} t\upsilon^t = \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)^2}$.

2. (4 βαθμοί) Προκειμένου να επιτευχθεί ταχύτερη εξόφληση του οφειλόμενου κεφαλαίου, ένα δάνειο ύψους $\alpha_{\overline{n|}}$ εξοφλείται χρεολυτικά με δόσεις ύψους $c>1$. (i) Να γραφεί τύπος για το ανεξόφλητο κεφάλαιο μετά την καταβολή της t δόσης, t = 1, 2, ..., m, όπου $m<n$. (ii) Αν το c είναι δεδομένο, πώς μπορεί να βρεθεί το αναγκαίο συνολικό πλήθος m των δόσεων (συμπεριλαμβανομένης τυχόν μερικής δόσης); (iii) Αν το δάνειο πρέπει να εξοφληθεί ακριβώς με m ίσες δόσεις, ποιο πρέπει να είναι το c; (iv) Αν, με $c=\frac{3}{2}$, δάνειο ύψους $\alpha_{\overline{20|}}$ εξοφλείται σε 10 χρόνια, να δειχθεί ότι $i=\sqrt[10]{2}-1$.

3. (6 βαθμοί) (i) Να υπολογισθεί, με τεχνικό επιτόκιο i = 0,03, το μαθηματικό απόθεμα 10ου έτους για 20ετή τίτλο κεφαλαιοποίησης με κεφάλαιο 1. (ii) Έστω τίτλος κεφαλαιοποίησης με κεφάλαιο μια μονάδα, διάρκεια n και κλήρωση στο τέλος κάθε έτους με σταθερή πιθανότητα κλήρωσης (και άμεσης καταβολής της μονάδας) q = 0,001. Να δειχθεί ότι το καθαρό ετήσιο ασφάλιστρο είναι $P=\frac{1}{999}\frac{\alpha'_{\overline{n-1|}}+1000\upsilon'^n}{\ddot{\alpha}_{\overline{n|}}}$, όπου τα τονούμενα σύμβολα είναι υπολογισμένα με επιτόκιο $i'=\frac{1+1000i}{999}$ (i το τεχνικό επιτόκιο).

4. (6 βαθμοί) 20ετής ομολογία με ονομαστική αξία 1 και αξία εξαγοράς στη λήξη 1,3 αγοράζεται στην τιμή 1 και αποφέρει στον αγοραστή i = r + 0,01, όπου r το ετήσιο τοκομερίδιο. (i) Να βρεθεί η απόδοση i. (ii) Αν ο αγοραστής πωλήσει την ομολογία στο τέλος 10 ετών και η τιμή πώλησης είναι 1, να βρεθεί η απόδοση που είχε κατά τη διάρκεια της 10ετίας. (iii) Ποια πρέπει να είναι η τιμή πώλησης στο (ii) ώστε ο αγοραστής να έχει στη 10ετία την ίδια απόδοση που θα είχε αν κρατούσε την ομολογία μέχρι τη λήξη της;

5. (6 βαθμοί) Τα χαρακτηριστικά ενός χαρτοφυλακίου με τρία είδη αξιογράφων είναι

Αξιόγραφο	c	α	β	Var(ε)
1	1/4	0,01	1	0,0006
2	1/4	0,02	3/2	0,0005
3	1/2	0,01	5/4	0,0007

(τα c αφορούν στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου). (i) Να βρεθούν τα α και β του χαρτοφυλακίου. (ii) Αν $Var(R_M)=0{,}0001$ (R_M η απόδοση της αγοράς), να υπολογισθούν οι συνδιακυμάνσεις μεταξύ των αποδόσεων των τριών αξιογράφων που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο και η διασπορά του χαρτοφυλακίου. (iii) Τι τμήμα της συνολικής διασποράς του

χαρτοφυλακίου σχετίζεται με το συστημικό ρίσκο (ρίσκο της αγοράς); (iv) Αν $E(R_M) = 0{,}03$, να βρεθεί η **επιπλέον** απόδοση (απόδοση πέραν του r_F) που αναμένεται από το χαρτοφυλάκιο.

6. (6 βαθμοί) Η απόδοση χαρτοφυλακίου με σύνθεση (x_1, x_2), $x_1 + x_2 = 1$, έχει διασπορά $x_1^2 + 4x_2^2 + 4\rho x_1 x_2$. (i) Να δειχθεί ότι η διασπορά ελαχιστοποιείται όταν $x_1 = \frac{4-2\rho}{5-4\rho}$, $x_2 = \frac{1-2\rho}{5-4\rho}$. (ii) Η ελάχιστη τιμή της διασποράς είναι $\frac{4(1-\rho^2)}{5-4\rho}$ (δεν ζητείται απόδειξη!) και προφανώς μηδενίζεται για ρ = –1 και ρ = 1. Να δειχθεί ότι, για ρ = –1, ο μηδενισμός επιτυγχάνεται με $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$ και ότι, για ρ=1, ο μηδενισμός επιτυγχάνεται με $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. (iii) Πώς μπορεί να επιτευχθεί πρακτικά η σύνθεση χαρτοφυλακίου $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ και με ποιο όρο θα χαρακτηρίζατε μια τέτοια "επενδυτική στρατηγική"; (iv) Να δείξετε ότι η ελάχιστη διασπορά στο (ii) εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $\rho = \frac{1}{2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

7. (4 βαθμοί) Χαρτοφυλάκιο αποτελείται από αξιόγραφα Α κατά ποσοστό x, $0 < x < 1$, και αξιόγραφα Β κατά ποσοστό 1–x. Για τις αποδόσεις των Α και Β έχουμε $\mu_A = 2$, $\sigma_A^2 = 4$, $\mu_B = 1$, $\sigma_B^2 = 1$ και $\rho_{AB} = \frac{1}{2}$. (i) Να βρεθεί η τιμή του x που ελαχιστοποιεί τη διασπορά της απόδοσης του χαρτοφυλακίου και η ελάχιστη τιμή της διασποράς. (ii) Να δειχθεί ότι η αποτελεσματική μεθόριος ορίζεται με $\sigma^2 = 3(\mu-1)^2 + 1$ και (ισοδύναμα) με $\mu = 1 + \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma^2 - 1)}$ (όπου $\mu = \mu(x)$ και $\sigma^2 = \sigma^2(x)$ ο μέσος και η διασπορά χαρτοφυλακίου που αντιστοιχούν στη σύνθεση $(x, 1-x)$). (iii) Να επαληθευθεί η ελάχιστη τιμή της διασποράς που βρέθηκε στο (i) εξετάζοντας την αποτελεσματική μεθόριο στο (ii).

8. (4 βαθμοί) (i) Να απαριθμήσετε με πληρότητα και σαφήνεια όλες τις συνθήκες που πρέπει να πληρεί μια αγορά για να ισχύει το πρότυπο τιμολόγησης πάγιων στοιχείων (CAPM). (ii) Να δώσετε τον ορισμό των όρων "γραμμή της αγοράς" (market line) και "αντιστάθμιση του κινδύνου" (hedging).

9. (6 βαθμοί) Έστω δικαίωμα (option) αγοράς μετοχής στο τέλος μιας περιόδου από σήμερα. Η σημερινή τιμή της μετοχής, η τιμή αγοράς της μετοχής που προβλέπει το δικαίωμα και η σημερινή αξία μιας χωρίς ρίσκο ομολογίας που λήγει στο τέλος της περιόδου είναι όλες ίσες με 1. Η ακίνδυνη απόδοση είναι $r = \frac{1}{10}$ και η τιμή της μετοχής στο τέλος της περιόδου αναμένεται να είναι ή $\frac{5}{4}$ ή $\frac{4}{5}$. (i) Να βρεθεί η σύνθεση (σε μονάδες μετοχής και μονάδες ομολογίας) χαρτοφυλακίου που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την τιμολόγηση του δικαιώματος. (ii) Να

βρεθούν οι κινδυνουδέτερες πιθανότητες που προκύπτουν από το (i). (iii) Να βρεθεί η σημερινή αξία (τιμή) του δικαιώματος.

10. (4 βαθμοί) Έστω δικαίωμα αγοράς μετοχής, που σήμερα τιμάται A = 1, τη χρονική στιγμή t = 1 και στην τιμή K και δεύτερο δικαίωμα αγοράς της ίδιας μετοχής στην ίδια τιμή K αλλά τη χρονική στιγμή t = 2. Αν η κανονική τετμημένη d_1 που απαιτείται για τον υπολογισμό της τιμής αγοράς του δικαιώματος με το πρότυπο Black-Scholes είναι ίση με d για το πρώτο δικαίωμα και ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}d$ για το δεύτερο, να δειχθεί ότι $K = e^{0,09+\frac{3}{2}\sigma^2}$, όπου σ η πτητικότητα της μετοχής.