1. Αν τα δ, $i^{(2)}$, $d^{(4)}$, $i^{(6)}$ και $d^{(8)}$ αντιστοιχούν όλα στο ίδιο αποτελεσματικό επιτόκιο, τότε $\dfrac{\left(1+\dfrac{i^{(2)}}{2}\right)^{-4}\left(1-\dfrac{d^{(4)}}{4}\right)^{-6}}{\left(1+\dfrac{i^{(6)}}{6}\right)^{12}\left(1-\dfrac{d^{(8)}}{8}\right)^{4}}\, e^{\delta} =$

(A) υ^3 (B) υ^2 (Γ) υ (Δ) 1 (E) 1+ i

2. Ένα 20ετές ασφαλιστικό προϊόν εγγυάται απόδοση 7% τα πρώτα 5 χρόνια, 5% τα επόμενα 5 χρόνια και μέση ετήσια απόδοση σε όλη την 20ετία 4%. Έστω i_1 η ελάχιστη απόδοση που χρειάζεται τη δεύτερη 10ετία για να επιτευχθεί το 4% αν επιτευχθούν ακριβώς οι στόχοι της πρώτης 10ετίας. Έστω i_2 η ελάχιστη απόδοση που απαιτείται τη δεύτερη 10ετία αν η απόδοση τα πρώτα 5 χρόνια αποβεί 6,5% και τα επόμενα 5 χρόνια αποβεί 5,5%. Να βρεθεί η διαφορά $i_1 - i_2$.

(Α) $3 \cdot 10^{-4}$ (Β) $3 \cdot 10^{-5}$ (Γ) $3 \cdot 10^{-6}$ (Δ) $3 \cdot 10^{-7}$ (Ε) $3 \cdot 10^{-8}$

3. Η ανατοκιστική συνάρτηση C(t) ικανοποιεί τις σχέσεις $(\alpha t+\beta)\ C'(t)-C(t)=0,\ \ C(n)=1$ και C(2n) = e. Να βρεθεί η C(t).

(A) $e^{\frac{1}{n^2}\left(n^2-t^2\right)}$ (B) $e^{\frac{1}{n^2}(2t-n)(t-n)}$ (Γ) $e^{\frac{1}{2n^2}t(t-n)}$

(Δ) $e^{\frac{1}{3n^2}\left(t^2-n^2\right)}$ (E) $e^{\frac{1}{2n}t}$

4. Δάνειο ύψους L εξοφλείται με n σταθερές δόσεις $\Delta = \frac{2}{n}L$. Ο τόκος που περιέχεται στην k δόση, k= 1, 2, ..., n, είναι $I_k = \frac{2}{n}L\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)$. Ποιο από τα παρακάτω είναι ίσο με το επιτόκιο;

(A) $\frac{1}{2n+1}$ (B) $\frac{1}{n}$ (Γ) $\frac{3}{2n+1}$ (Δ) $\frac{3}{2n}$ (E) $\frac{2}{n}$

5. Να βρεθεί, με επιτόκιο i, η παρούσα αξία της συνεχούς ράντας $f(t) = \bar{a}_{\overline{t|}} + \bar{s}_{\overline{t|}}$, $0 \le t \le n$, όπου τα $\bar{a}_{\overline{t|}}$ και $\bar{s}_{\overline{t|}}$ είναι επίσης υπολογισμένα με επιτόκιο i.

(A) $\dfrac{2n - \bar{a}_{\overline{2n|}}}{2\delta}$ (B) $\dfrac{2n - \bar{a}_{\overline{2n|}}}{\delta}$ (Γ) $\dfrac{n - \bar{a}_{\overline{n|}}}{\delta}$

(Δ) $\dfrac{\bar{s}_{\overline{n|}} - \bar{a}_{\overline{n|}}}{\delta}$ (E) $\dfrac{\bar{s}_{\overline{n|}} + \bar{a}_{\overline{n|}}}{\delta}$

6. Η σ.π.π. της έντασης ανατοκισμού είναι $f_{\Delta}(\delta) = 24.000\delta^2,\ 0 \le \delta \le 0{,}05$. Να βρεθεί η $E\left((1+I)^{20}\right)$ και το ισοδύναμο σταθερό δ_1 που παράγει στην 20ετία συσσώρευση ίση με $E\left((1+I)^{20}\right)$.

	$E\left((1+I)^{20}\right)$	δ_1
(Α)	2(e-2)	1,828%
(Β)	2(e-2)	2,871%
(Γ)	2(e-2)	3,913%
(Δ)	3(e-2)	3,913%
(Ε)	3(e-2)	4,457%

7. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\partial\bar{\alpha}_{\overline{n|}}}{\partial n} - \frac{\partial\bar{\alpha}_{\overline{n|}}}{\partial\delta}\right)=$

(A) 0 (B) δ (Γ) 1 (Δ) $\frac{1}{\delta}$ (E) $\frac{1}{\delta^2}$

8. Έστω 20ετής τίτλος κεφαλοποίησης με επιτόκιο 4% και κεφάλαιο στη λήξη 1. Να βρεθούν ${}_1V$, το μαθηματικό απόθεμα πρώτου έτους αν ο τίτλος δεν προβλέπει κληρώσεις, και ${}_1V^{(\kappa)}$, το μαθηματικό απόθεμα πρώτου έτους αν ο τίτλος προβλέπει, στο τέλος κάθε έτους, κλήρωση και εξόφληση (στο ακέραιο) του 1% των τίτλων.

	${}_1V$	${}_1V^{(\kappa)}$
(Α)	0,03229	0,02252
(Β)	0,03229	0,02382
(Γ)	0,03358	0,02229
(Δ)	0,03358	0,02252
(Ε)	0,03358	0,02382

9. Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις αληθεύουν;

I. $\dfrac{s_{\overline{n|}}\ \alpha_{\overline{n|}}}{s_{\overline{n|}}\ -\ \alpha_{\overline{n|}}} = \alpha_{\overline{\infty|}}$

II. $\sum_{t=0}^{n}\left(s_{\overline{t|}} + \alpha_{\overline{n-t|}}\right) = s_{\overline{n|}}\ \alpha_{\overline{n|}}$

III. $\dfrac{1}{s_{\overline{n|}}\ \alpha_{\overline{n|}}}\ \sum_{t=1}^{n} \upsilon^{t} s_{\overline{t|}}\ =\ \dfrac{n - \alpha_{\overline{n|}}}{s_{\overline{n|}} - \alpha_{\overline{n|}}}$

(Α) Μόνον η I (Β) Μόνον η II (Γ) Μόνον οι I, II

(Δ) Μόνον οι I, III (Ε) Όλες

10. Δάνειο ύψους 10.000.000 μονάδων εξοφλείται με 60 ίσες τριμηνιαίες δόσεις και επιτόκιο $i^{(4)} = 7\%$. Έξι χρόνια μετά τη δανειοδότηση, ο δανειολήπτης καταβάλλει ένα πρόσθετο ποσό Χ εφάπαξ και έτσι επιτυγχάνει τη λήξη του δανείου δύο χρόνια νωρίτερα από την αρχική του λήξη. Ποια η τιμή του Χ;

(Α) 1.097.946 (Β) 1.232.483 (Γ) 1.250.487

(Δ) 1.351.701 (Ε) 1.470.919

11. Το ύψος ενός κεφαλαίου τις χρονικές στιγμές $t = 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ 1$ και πριν από τυχόν καταθέσεις ή αναλήψεις κατά τις ίδιες στιγμές είναι $B_0 = 3,\ B_{1/4} = 3{,}15,\ B_{2/4} = 4{,}15,\ B_{3/4} = 3{,}78$ και $B_1 = 5$. Οι αντίστοιχες καταθέσεις και αναλήψεις είναι $C_{1/4} = 1,\ C_{2/4} = -1$ και $C_{3/4} = 1$. Να βρεθεί η διαφορά ανάμεσα στη χρονοσταθμισμένη απόδοση και στην εσωτερική απόδοση.

(Α) –3,1% (Β) –1,5% (Γ) 0,5% (Δ) 1,5% (Ε) 3,1%

12. Με ένταση ανατοκισμού δ, η παρούσα αξία της συνεχούς διηνεκούς ράντας $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ είναι $\sqrt{\frac{\pi}{\delta}}$. Ποιο από τα παρακάτω εκφράζει την παρούσα αξία των ραντών $f_k(t)=\frac{4^k}{k!\sqrt{\pi}}t^{k-1/2}$, $k=1,2,3,\ldots$;

(Α) $\binom{2k}{k}\delta^{-(k+1/2)}$ (Β) $(2k)_k\delta^{-(k+1/2)}$ (Γ) $(2k)!\,\delta^{-(k+1/2)}$

(Δ) $\frac{1}{k!}\delta^{-(k+1/2)}$ (Ε) $\frac{1}{(k!)^2}\delta^{-(k+1/2)}$

13. Δίδονται καταβολές ύψους 1 τις χρονικές στιγμές t = 0 και t = 11. Αν η μέση διάρκεια των καταβολών είναι μ και η διασπορά των χρόνων των καταβολών είναι σ^2, ποιο από τα παρακάτω είναι ίσο με $\frac{\sigma^2}{\mu^2}$;

(A) $(1+i)^{11}$ (B) $(1+i)^{11/2}$ (Γ) 1 (Δ) $\upsilon^{11/2}$ (E) υ^{11}

14. Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν;

I. Μόνη η πτητικότητα δεν αποτελεί επαρκές κριτήριο επικινδυνότητας για επενδυτές με δευτεροβάθμια συνάρτηση ωφελιμότητας.

II. Οι κινδυνόφοβοι επενδυτές επιθυμούν θετική λοξότητα και μεγάλες τιμές της κύρτωσης (4ης ροπής).

III. Οι κατανομές πιθανοτήτων που σχετίζονται με παράγωγα προϊόντα κατά κανόνα εμφανίζουν λοξότητα.

(Α) Κανένα (Β) Μόνον το II (Γ) Μόνον το III

(Δ) Μόνον τα I, II (Ε) Μόνον τα I, III

15. Διετής ομολογία με F = C = 100 και ετήσια κουπόνια 6% τιμάται 99. Το επιτόκιο μονοετών ομολόγων χωρίς τοκομερίδια είναι 5,5% και διετών ομολόγων χωρίς τοκομερίδια είναι 6,0%. Να βρεθούν (α) η απόδοση i του αγοραστή της ομολογίας και (β) η τυποποιημένη απόδοση j, γνωστή ως par yield, για διετή ομόλογα με κουπόνια.

	i (%)	j (%)
(Α)	6,55	5,73
(Β)	6,55	5,98
(Γ)	7,06	5,73
(Δ)	7,61	5,73
(Ε)	7,61	5,98

16. Οι τ.μ. V_i, $i=1,2$, είναι ανεξάρτητες με $E(V_i)=\mu_i$, $Var(V_i)=\sigma_i^2$. Να βρεθεί $Var(V_1+V_1V_2)$.

(A) $\sigma_1^2\sigma_2^2+(1+\mu_1)^2\sigma_2^2+\mu_2^2\sigma_1^2$

(B) $\sigma_1^2\sigma_2^2+\mu_1^2\sigma_2^2+(1+\mu_2)^2\sigma_1^2$

(Γ) $\sigma_1^2\sigma_2^2+\mu_1^2\sigma_2^2+\mu_2^2\sigma_1^2$

(Δ) $(\mu_1^2+\sigma_1^2)(\mu_2^2+\sigma_2^2)$

(E) $\sigma_1^2(1+\sigma_2^2)$

17. Η τιμή αγοράς μιας δεκαετούς ομολογίας με ονομαστική αξία F=1.000, ετήσια τοκομερίδια προς 5% και αξία εξόφλησης στη λήξη C=1.200 είναι P=1.000,72. Οι τόκοι φορολογούνται προς 10%. Αν η απόδοση από την ομολογία είναι 5,5%, πόσο φορολογούνται οι υπεραξίες;

(Α) 20% (Β) 25% (Γ) 30% (Δ) 35% (Ε) 40%

18. Τα τελευταία 3 χρόνια οι αποδόσεις της αγοράς ήταν 6%, 3% και 6%, οι δε αντίστοιχες αποδόσεις του αξιογράφου Χ ήταν 8%, 2% και 11%. Να βρεθούν ο συντελεστής β του αξιογράφου και ρ, ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των δύο αποδόσεων.

	β	ρ
(Α)	3/2	$\sqrt{7}/7$
(Β)	3/2	$(5/14)\sqrt{7}$
(Γ)	5/2	$\sqrt{7}/7$
(Δ)	5/2	$(3/14)\sqrt{7}$
(Ε)	5/2	$(5/14)\sqrt{7}$

19. Η απόδοση R ενός αξιογράφου ικανοποιεί E(R)=0,06, Var(R)=0,0025, $\tilde{\mu}_2 = \int_0^{0,03} (0,03 - r)^2 f_R(r)dr = 0,0009$ και $\beta = \frac{4}{3}$. Η ασφαλής απόδοση είναι $r_F = 0,04$ και η συνδιακύμανση της απόδοσης R και της απόδοσης της αγοράς είναι 0,001666... . Ποιο από τα παρακάτω αληθεύει;

(Α) Η μαθηματική ελπίδα της απόδοσης της αγοράς είναι 0,05.

(Β) Η διασπορά της απόδοσης της αγοράς είναι 0,0016.

(Γ) Ο συντελεστής συσχέτισης της απόδοσης R και της απόδοσης της αγοράς είναι 0,9.

(Δ) Η τιμή του δείκτη Sharpe είναι $\frac{2}{5}$.

(Ε) Η τιμή του δείκτη Sortino είναι $\frac{3}{20}$.

20. Τα επιτόκια ετήσιων μελλοντικών περιόδων (forward rates) $f_i,\ i = 0, 1, ..., n-1,$ μεταβάλλονται σε $f_i' = \alpha f_i + \alpha - 1$ (α σταθερά). Ποιο από τα παρακάτω εκφράζει την αντίστοιχη μεταβολή των επιτοκίων $s_i,\ i = 1, 2, ..., n,$ που ισχύουν σήμερα (spot rates) για τοποθετήσεις διάρκειας i ;

(A) $\alpha s_i - (\alpha - 1)$ (B) $\alpha(1 + s_i) - 1$ (Γ) $s_i + \alpha - 1$

(Δ) $(\alpha - 1)s_i$ (E) αs_i

21. Δίδεται $R_i = 0{,}03 + 0{,}6R_m + \varepsilon_i$, όπου $R_m \sim N(0{,}04,\ 0{,}0004)$ και $\varepsilon_i \sim N(0,\ 0{,}000025)$. Να βρεθεί $\dfrac{\sqrt{Var(R_i)}}{E(R_i)}$.

(A) 0,38 (B) 0,34 (Γ) 0,30 (Δ) 0,24 (E) 0,22

22. Η σημερινή τιμή μιας μετοχής είναι $A = e^{0,055}$. Ο Χ αγοράζει μια οψιόν για την αγορά της μετοχής όταν t = 1 στην τιμή K = 1. Αν r = 0,04 και $\sigma^2 = 0,01$, ποιο από τα παρακάτω είναι το τίμημα που πρέπει να καταβάλει ο Χ για την αγορά της οψιόν; (Στις απαντήσεις, με $N(x)$ δηλώνεται η πιθανότητα ότι μια τυπική κανονική τ.μ. θα πάρει τιμή $\leq x$.)

(Α) $e^{0,055}\, N(1) - e^{-0,04}\, N(0,9)$

(Β) $e^{0,055}\, N(1) - e^{-0,04}\, N(0,8)$

(Γ) $e^{0,055}\, N(1) - e^{-0,04}\, N(0,5)$

(Δ) $e^{0,015}\, N(1) - e^{-0,04}\, N(0,9)$

(Ε) $e^{0,015}\, N(1) - N(0,9)$

23. Μια δεκαετής ομολογία με F = C = 1.000 και r = 10% έχει απόδοση 10%. Έστω P_1 η ακριβής τιμή της ομολογίας όταν η απόδοση μειωθεί σε 9,5% και έστω P_2 η αντίστοιχη προσεγγιστική τιμή που βασίζεται στη μέση διάρκεια της ομολογίας. Αν η μέση διάρκεια είναι 6,76, ποιο από τα παρακάτω είναι $P_1 - P_2$;

(Α) 0,06 (Β) 0,36 (Γ) 0,66 (Δ) 1,36 (Ε) 1,66

24. Δίδονται $R_1 = 0{,}03 + 0{,}6R_m + \varepsilon_1$ και $R_2 = 0{,}03 + 0{,}8R_m + \varepsilon_2$, όπου $Var(R_m) = \sigma^2$, $Var(\varepsilon_1) = 0{,}36\kappa^2$, $Var(\varepsilon_2) = 0{,}64\lambda^2$ και R_m, ε_1, ε_2 ανεξάρτητες τ.μ.. Να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης των R_1 και R_2.

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}\sqrt{1+\lambda^2}}$

(B) $\dfrac{\sigma^2}{\kappa\lambda}$

(Γ) $\dfrac{\sigma^2}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}$

(Δ) $\dfrac{\sigma^2}{\sqrt{1+\kappa^2}\sqrt{1+\lambda^2}}$

(E) $\dfrac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2+\kappa^2}\sqrt{\sigma^2+\lambda^2}}$

1. (4 βαθμοί) Αν η ένταση ανατοκισμού είναι $\delta_t = 0{,}04 - 0{,}0005t,\ \ t \geq 0$, η παρούσα αξία μιας ράντας με συνεχή καταβολή $f(t) = 80 - t,\ 0 \leq t \leq 20$, είναι Π. Να δειχθεί ότι ο πλησιέστερος προς το Π ακέραιος είναι 1.007.

2. (4 βαθμοί) (i) Να απαριθμήσετε τους κυριότερους επενδυτικούς κινδύνους και να δώσετε μια σύντομη περιγραφή κάθε κινδύνου. (ii) Να ονομάσετε τα σπουδαιότερα κριτήρια για την επιλογή επενδύσεων και να σχολιάσετε τη σχετική βαρύτητα αυτών των κριτηρίων κάτω από διαφορετικές συνθήκες.

3. (3 βαθμοί) Δίδεται $f(\delta) = A_1 - e^{-\delta} + A_2 e^{-2\delta} - e^{-3\delta}$, συνάρτηση έντασης ανατοκισμού. Να βρεθούν $A_1,\ A_2$ τέτοια ώστε $f(ln2) = 0$ και $f'(ln2) = 0$ και να δειχθεί ότι, για αυτά τα $A_1,\ A_2$, $f''(ln2) = \frac{1}{8} > 0$.

4. (3 βαθμοί) Ομολογία με ονομαστική αξία F, τοκομερίδια rF και αξία εξαγοράς C αγοράζεται σε τιμή $P > C$. Να δειχθεί η σχέση $i = \frac{1}{1+k} g - \frac{k}{1+k}\left(\frac{1}{s_{\overline{n|}}}\right)$, όπου i η απόδοση για τον αγοραστή, $k = \frac{P-C}{C}$, $g = \frac{rF}{C}$ και η $s_{\overline{n|}}$ είναι υπολογισμένη με επιτόκιο ίσο προς την απόδοση i.

5. (4 βαθμοί) (i) Δάνειο ύψους $\alpha_{\overline{n|}} + \frac{1}{2}$ εξοφλείται κατά το συνήθη χρεολυτικό τρόπο, αλλά με αυθαίρετα καθορισμένες δόσεις ύψους 1. Να βρεθεί το ανεξόφλητο κεφάλαιο μετά την καταβολή της υπ' αριθ. n δόσης. (ii) Δάνειο ύψους $\alpha_{\overline{n|}}$ εξοφλείται χρεολυτικά, αλλά με δόσεις ύψους 2. Να δειχθεί ότι ο αριθμός δόσεων που απαιτείται για την εξόφληση του δανείου είναι ο ελάχιστος ακέραιος $k \geq \frac{1}{\delta} ln \frac{2}{1+\upsilon^n}$.

6. (4 βαθμοί) Μια διηνεκής χρηματική ροή αποτελείται από εισροές ύψους 1 τις χρονικές στιγμές $2k,\ k = 0, 1, 2, ...,$ και εκροές ύψους $1+\alpha,\ \alpha > 0,$ τις χρονικές στιγμές $3k+1,\ k = 0, 1, 2, ...$. (i) Να εκφρασθεί η εσωτερική απόδοση (yield) i ως συνάρτηση του α. (ii) Να δειχθεί ότι η εσωτερική απόδοση είναι 0 όταν $\alpha = 1/2$ και έχει μοναδική θετική τιμή για κάθε $\alpha > 1/2$. (iii) Να δειχθεί ότι $\lim_{\alpha \to \infty} i = \infty$ και $\lim_{\alpha \to 0} i = -1$. Τι μπορεί να λεχθεί όταν $\alpha = 0$;

7. (4 βαθμοί) Οι καταβολές μιας διηνεκούς ράντας f(k), k = 0, 1, 2, ..., παρουσιάζουν περιοδικότητα. Στους πρώτους 2n – 1 φυσικούς αριθμούς, οι καταβολές ορίζονται ως

$f(k)=\begin{cases} k+1, & k=0,1,...,n-1 \\ 2n-k-1, & k=n,n+1,...,2n-2 \end{cases}$. Στη συνέχεια, οι καταβολές αυτές επαναλαμβάνονται (με την ίδια σειρά) πάνω στους ακεραίους από 2n – 1 έως και 4n – 3, μετά στους ακεραίους από 4n – 2 έως και 6n – 4, κ.ο.κ. επ' άπειρον. Να δειχθεί ότι η παρούσα αξία της ράντας είναι $\frac{\left(\ddot{a}_{\overline{n}|}\right)^2}{\ddot{a}_{\overline{2n-1}|}}\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$.

Να δειχθεί ακόμα ότι, όταν $n \to \infty$, η παρούσα αξία τείνει στο $1/d^2$.

8. (3 βαθμοί) Η ένταση ανατοκισμού Δ ακολουθεί τη σ.π.π. Γάμμα $f_\Delta(\delta)=4\delta^2 e^{-2\delta}$, $\delta \geq 0$. (i) Να βρεθούν οι μαθηματικές ελπίδες $E(I)$, $E\left[\frac{1}{(ln(1+I))^2}\right]$, $E(V^n)$. (ii) Να βρεθεί η $E(D^{(m)})$ και να δειχθεί ότι $\lim_{m\to\infty} E(D^{(m)}) = E(\Delta) = 3/2$.

9. (4 βαθμοί) Να περιγράψετε το πρότυπο Black-Scholes για την τιμολόγηση δικαιωμάτων μελλοντικών αγορών (options), ορίζοντας με προσοχή όλες τις παραμέτρους που εμφανίζονται στο πρότυπο. Να περιγράψετε επίσης όλες τις υποθέσεις στις οποίες βασίζεται το πρότυπο.

10. (4 βαθμοί) Η καταβολή μιας μονάδας τη χρονική στιγμή t = n ανοσοποιείται με δύο επενδύσεις, μία που λήγει τη χρονική στιγμή t = n – 1 και έχει ύψος 1 / 2 και μία που λήγει τη χρονική στιγμή t = n + ε και έχει ύψος α. Να βρεθούν τα α και ε.

11. (3 βαθμοί) Στο τέλος μιας μονάδας χρόνου, η τιμή μιας μετοχής με σημερινή τιμή 1 θα είναι ή u=11/10 ή d=10/11. (i) Αν $r = 1 + r_F = 57/55$ (όπου r_F η "ασφαλής απόδοση"), να βρεθούν οι "κινδυνουδέτερες" πιθανότητες p και q. (ii) Θεωρούμε τώρα μια οψιόν για την αγορά της μετοχής στο τέλος δύο μονάδων χρόνου με τιμή άσκησης $K = d^2$. Να βρεθεί η τιμή (σημερινή αξία) της οψιόν.