ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:		**Επίθετο:**			
Ημερομηνία: 1-2-2023		**Πρωί:**	**Χ**	**Απόγευμα:**	
Θεματική ενότητα: Αναλογιστικά Πρότυπα Επιβίωσης (Αδ)					

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Ερώτηση 1η

Δίνεται η εξής συμμετρική M-W-A φόρμουλα $v_x = a_{-2}u_{x-2} + a_0u_x + a_2u_{x+2}$ η οποία ικανοποιεί τα ακόλουθα:

I. Παράγει γραμμικές συναρτήσεις,

II. Το άθροισμα $R_1^2 + R_2^2$ελαχιστοποιείται

Να καθοριστεί η τιμή α_0.

(A) 1/8 (B) 3/10 (Γ) 5/16 (Δ) 27/65 (E) 19/45

Ερώτηση 2η

Δίνονται οι τιμές των αρχικών παρατηρήσεων: $u_1 = 10, u_2 = 17$ &$u_3 = 46$ που αντιστοιχούν σε δείγματα: $n_1 = 100, n_2 = 150$ &$n_3 = 100$. Χρησιμοποιώντας τα μεγέθη δείγματος ως βάρη και την ένταση θνησιμότητας $\mu_x = 1 + 5 \cdot 2^x$, να υπολογιστεί η εξομαλυμένη τιμή v_3 με χρήση της εξομάλυνσης Whittaker με h = 150. Το κομμάτι της λειότητας υπολογίζεται κάνοντας χρήση της σχέσης:

$$S = h \cdot (\Delta^2 v_x - r\Delta v_x)^2, \text{ όπου } r = C - 1.$$

(A) 52/7 (B) 137/7 (Γ) 213/7 (Δ) 313/7 (E) 413/7

Ερώτηση 3η

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \frac{\Gamma(31)}{\Gamma(19)\Gamma(9)} \cdot t^{19} \cdot (1-t)^9 dt$.

(A) 5125 (B) 5130 (Γ) 5135 (Δ) 5140 (E) 5145

Ερώτηση 4η

Δίνεται ότι ${}_5p_{70} = 0.600$ &${}_{10}p_{70} = 0.140$. Αν η θνησιμότητα περιγράφεται από τον νόμο του Gompertz, να βρεθεί το C^5.

(A) 0,85 (B) 1,85 (Γ) 2,00 (Δ) 3,85 (E) 2,85

Ερώτηση 5η

Προσπαθείτε να εξομαλύνετε 3 παρατηρήσεις χρησιμοποιώντας την μέθοδο Kimeldorf – Jones. Σας δίνονται τα ακόλουθα:

- $Var(T_1) = 9$
- $Var(T_3) = 25$
- $c_{ij} = 1 - \frac{1}{2}(|i - j|)$
- $a_{23} = 10$

Να υπολογιστεί το α_{12}.

(Α) 2 (Β) 3 (Γ) 4 (Δ) 5 (Ε) 6

Ερώτηση 6η

Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας:

x	lnp_x
45	lnp_{45}
46	lnp_{46}
47	-0,006769
48	-0,007057

Να υπολογιστεί το lnp_{45}, αν υποθέσουμε ότι η ένταση θνησιμότητας ακολουθεί κατανομή Weibull με n = 2 και k = 0,000003.
(Δίνεται: $\mu_x = k \cdot x^n,\ x \geq 0,\ k > 0,\ n > 0$)

(Α)-0,006157 (Β)-0,006175 (Γ)-0,006193 (Δ)-0,006211 (Ε)-0,006229

Ερώτηση 7η

Σε μια εξομάλυνση η οποία έγινε με τριτοβάθμια spline δυο τόξων από το x=0 έως x=10 ισχύει:

I. $p_0(x) = 40x + 5x^2 + 2x^3$
II. Η $p_1(x)$ με $0 \leq x \leq 10$ συναντάει την $p_0(x)$ στο σημείο 5
III. $p_1(10) = 5025$

Να υπολογίσετε την τιμή $p_1(9)$.

(Α)2223 (Β)2523 (Γ)2823 (Δ)3311 (Ε)3511

Ερώτηση 8η

Μια εξομάλυνση Whittaker χρησιμοποιείται για τις ηλικίες 40 έως 44 με τα εξής δεδομένα:

$$cv = wu, \mu\varepsilon\ c = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 20 & -12 & 3 & 0 \\ 3 & -12 & 21 & -12 & 3 \\ 0 & 3 & -12 & 20 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 5 \end{bmatrix} \& \ wu = \begin{bmatrix} 28 \\ 40 \\ 24 \\ 35 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστεί το $\sum_{\chi=40}^{44} u_x$.

(A) 27 (B) 31 (Γ) 45 (Δ) 67 (E) 135

Ερώτηση 9η

Μια ομάδα 3 ατόμων υπόκεινται σε ένα αίτιο εξόδου, αυτό του θανάτου. Η επιβίωση αυτού το πληθυσμού περιγράφεται από την ένταση θνησιμότητας η οποία δίνεται από τη σχέση$\mu_x = kx$, όπου χείναι η ηλικία.
Με βάση τα δεδομένα του πίνακα:

Άτομο	Ηλικία εισόδου	Αιτία Εξόδου
1	20	Θάνατος στην ηλικία των 40
2	30	Θάνατος στην ηλικία των 40
3	20	Προγραμματισμένη αποχώρηση στην ηλικία των 30

Να υπολογιστεί ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου k.

(A) 1/1200 (B) 1/1000 (Γ) 1/800 (Δ) 1/600 (E) 1/400

Ερώτηση 10η

Μια κατανομή Dirichlet έχει οριστεί για να περιγράψει την εκ των προτέρων κατανομή της θνησιμότητας ενός συγκεκριμένου τύπου πειραματόζωων, της μορφής $t_i = {}_{i|}q_0, i = 0,1,2,3$.
Σε μια μελέτη 200 πειραματόζωων παρατηρήθηκε ότι 20 πέθαναν στη 1η χρονική περίοδο, 60 στην 2η , 110 στην 3η και 10 στην 4η.
Χρησιμοποιώντας ΜπεϋζιανήΕξομάλυνση, η εκ των υστέρων κατανομή καθορίστηκε ως:

$$f(t|d) = k \cdot t_1^{29} \cdot t_2^{89} \cdot t_3^{134} \cdot t_4^{24}$$

Όπου k, σταθερά. Να υπολογιστεί το διάνυσμα των μέσων τιμών (m') της πρότερης κατανομή T.

(Α) [0,1250 0,3750 0,3125 0,1875]
(Β) [0,1000 0,3000 0,3000 0,1000]
(Γ) [0,2500 0,4450 0,4450 0,2500]
(Δ) [0,2550 0,4550 0,4550 0,2550]
(Ε) [0,1500 0,3500 0,3500 0,1500]

Ερώτηση 11η

Οι παράμετροι μιας Weibull έντασης θνησιμότητας, $\mu_x = k \cdot x^n$, πρόκειται να εκτιμηθούν μέσω παλινδρόμησης χρησιμοποιώντας τα εξής δεδομένα:

$$u_2 = 10^{-2}, u_4 = 10^{-1.7}, u_8 = 10^{-1.2} \& u_{16} = 10^{-0.5}$$

Το αντίστροφο των δεικτών των παρατηρούμενων τιμών θα χρησιμοποιηθούν ως βάρη στην αποτίμηση. Χρησιμοποιώντας το $\log_{10} 2 = 0.3$, να καθοριστεί το n μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων.

(Α) 1,181 (Β) 1,281 (Γ) 1,381 (Δ) 1,481 (Ε) 1,581

Ερώτηση 12η

Έστω ότι χρησιμοποιείται η μέθοδο εξομάλυνσης κατά Bayes. Η πρότερη γνώση σχετικά με τις τυχαίες μεταβλητές T και U, περιλαμβάνει τα ακόλουθα:

I. Οι τυχαίες μεταβλητές T_1 και T_2 είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν Κατανομές Βήτα και πιο συγκεκριμένα: $T_1 \sim B(2,3)$ και $T_2 \sim B(3,4)$.

II. Οι τυχαίες μεταβλητές U_1/T_1 και U_2/T_2 είναι ανεξάρτητες και αποτελούν διωνυμικές αναλογίες.

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας για την πραγματοποίηση των τυχαίων μεταβλητών $U_i, i = 1,2$.

i	Έκθεση στον Κίνδυνο	Θάνατοι
1	5	2
2	3	2

Το διάνυσμα των εξομαλυμένων τιμών v, υπολογίζεται από τη μέση τιμή της εκ των υστέρων κατανομής. Να υπολογιστεί το $v_1 + v_2$.

(Α) 5/6 (Β) 6/7 (Γ) 7/8 (Δ) 8/9 (Ε) 9/10

Ερώτηση 13η

Σε μία κλινική μελέτη 10 πειραματόζωων παρατηρούνται οι ακόλουθοι χρόνοι θανάτου:

0,42 0,87 1,23 1,53 1,87 2,03 2,80 2,91 3,47 4,07

Αν η ένταση θνησιμότητας είναι σταθερή σε κάθε ηλικιακό διάστημα ενός έτους να εκτιμήσετε την διακύμανση της έντασης θνησιμότητας στο $t = 1,5$.

(Α) 0,050 (Β) 0,075 (Γ) 0,100 (Δ) 0,125 (Ε) 0,150

Ερώτηση 14η

Εάν η συνάρτηση επιβίωσης δίνεται από την σχέση:

$$S(x) = 1 - (0{,}01x)^2 \ , \ x\epsilon[0{,}100]$$

Να βρεθεί ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής ενός ατόμου ηλικίας 50.

(Α) $\frac{230}{9}$ (Β) $\frac{240}{9}$ (Γ) $\frac{250}{9}$ (Δ) $\frac{260}{9}$ (Ε) $\frac{270}{9}$

Ερώτηση 15η

Για ένα πληθυσμό 100 ατόμων ηλικίας 20 ισχύουν τα παρακάτω:

- Η πιθανότητα θανάτου ενός ατόμου πριν την ηλικία των 25 ισούται με 0,25.
- Ο κεντρικός ρυθμός θνησιμότητας στο διάστημα [20,25] ισούται με $\frac{1}{18}$.

Να βρείτε τον μέσο αναμενόμενο αριθμό ετών που ζουν όσοι πεθαίνουν πριν την ηλικία των 25.

(Α) 2,0 (Β) 2,5 (Γ) 3,0 (Δ) 3,5 (Ε) 4,0

Ερώτηση 16η

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

x	n_x	d_x
40	100	10
41	200	20
41	200	20

Ένας εκτιμητής της πιθανότητας ${}_3p_{40}$ μπορεί να προκύψει εκτιμώντας τις ετήσιες πιθανότητες επιβίωσης p_x από την σχέση: $\hat{p}_x = 1 - \frac{D_x}{n_x}$.

Υποθέτοντας ότι οι εκτιμητές $\hat{p}_x$είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και χρησιμοποιώντας τον τύπο Greenwood, να εκτιμήσετε την διακύμανση του εκτιμητή της πιθανότητας ${}_3p_{40}$.

(Α) 0,0012 (Β) 0,0015 (Γ) 0,0017 (Δ) 0,0020 (Ε) 0,0022

Ερώτηση 17η

Ένας αριθμός ατόμων εισέρχεται στο ηλικιακό διάστημα $(x, x+1]$ σε ηλικία $\boldsymbol{x}$.Από αυτά, $\boldsymbol{e_1}$ άτομα αποχωρούν προγραμματισμένα σε ηλικία $\boldsymbol{x + \frac{1}{4}}$και $\boldsymbol{e_2}$ άτομα αποχωρούν προγραμματισμένα σε ηλικία $\boldsymbol{x + \frac{1}{2}}$. Επιπλέον, $\boldsymbol{d}$ άτομα πεθαίνουν σε ηλικία $\boldsymbol{x + t_i}$, $0 < t_i < 1$, $i = 1,2, \dots, d$ και$\boldsymbol{s}$ άτομα παρατηρούνται μέχρι το τέλος του διαστήματος. Αν ο θάνατος είναι το μοναδικό αίτιο εξόδου, ποια ή ποιες από τις παρακάτω σχέσεις περιγράφει τον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας $L(q_x)$:

I. $\left(\prod_{i=1}^{d} {}_{t_i}p_x \cdot \mu_{x+t_i}\right) \cdot \left({}_{\frac{1}{4}}p_x \cdot \mu_{x+\frac{1}{4}}\right)^{e_1} \cdot \left({}_{\frac{1}{2}}p_x \cdot \mu_{x+\frac{1}{2}}\right)^{e_2} \cdot (1 - q_x)^s$

II. $\left(\prod_{i=1}^{d} {}_{t_i}p_x \cdot \mu_{x+t_i}\right) \cdot \left({}_{\frac{1}{4}}p_x\right)^{e_1} \cdot \left({}_{\frac{1}{2}}p_x\right)^{e_2} \cdot (p_x)^s$

III. $(q_x)^d \cdot \left(1 - {}_{\frac{1}{4}}q_x\right)^{e_1} \cdot \left(1 - {}_{\frac{1}{2}}q_x\right)^{e_2} \cdot (1 - q_x)^s$

(Α) ΙΙ και ΙΙΙ (Β) Ι και ΙΙΙ (Γ) Ι (Δ) ΙΙ (Ε) ΙΙΙ

Ερώτηση 18η

Κάνοντας χρήση του εκτιμητή product-limit (Kaplan-Meier) για την εκτίμηση της συνάρτησης επιβίωσης $S(x)$ προκύπτει:

$$\hat{S}(x) = \begin{cases} 1\,, 0 \leq x < a \\ \frac{49}{50}\,, a \leq x < b \\ \frac{1911}{2000}\,, b \leq x < c \\ \frac{36309}{40000}\,, c \leq x < d \end{cases}$$

Να βρεθεί ο εκτιμητής Nelson-Aalen$S(c)$.

(Α) $e^{-23/250}$ (Β) $e^{-93/1000}$ (Γ) $e^{-19/200}$ (Δ) $e^{-97/1000}$ (Ε) $e^{-1/10}$

Ερώτηση 19η

Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή που περιγράφεται από την παρακάτω συνάρτηση επιβίωσης:

$$S(x) = e^{-x/2}\,,\ \ x \geq 0$$

Αν η τυχαία μεταβλητή περικόπτεται από πάνω στο $x = 4$, να βρείτε την ένταση κινδύνου στο $x = 2$ για την περικεκομμένη μεταβλητή.

(Α) $\frac{1}{2(e-1)}$ (Β) $\frac{e^2}{2(e^2-1)}$ (Γ) $\frac{1}{2}$ (Δ) $\frac{e}{2(e-1)}$ (Ε) $\frac{e^2}{2(e-1)}$

Ερώτηση 20η

Για ένα μοντέλο επιβίωσης οι αρχικές εκτιμήσεις θανάτου έχουν υπολογιστεί ως ακολούθως:

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
1,5%	9,2%	20%	13%	10%

Οι αρχικές εκτιμήσεις αναθεωρούνται εφαρμόζοντας την μέθοδο Least-Squares Cubic Spline στο διάστημα $[1,5]$ με $w_i = 1$ για κάθε $i = 0,1,\dots,4$. Αν το πολυώνυμο που προκύπτει είναι το εξής:

$$p(x) = 0{,}00075 \cdot x^3 + a \cdot x^2 + 0{,}2065 \cdot x - 0{,}1636$$

Να προσδιορίσετε την τιμή του a.

(Α) $-0{,}035$ (Β) $-0{,}025$ (Γ) $-0{,}015$ (Δ) $0{,}015$ (Ε) $0{,}045$

Ερώτηση 21η

Κάτω από την υπόθεση Balducci για την συνάρτηση ℓ_{x+s} στο διάστημα $(x, x+1]$, ποιο από τα παρακάτω είναι σωστά:

I. ${}_{\frac{1}{2}}q_x \geq {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}$

II. ${}_sp_x = \frac{p_x}{p_x + s \cdot q_x}$

III. ${}_sq_x = s \cdot \mu_{x+s}$

IV. $\ell_{x+\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \ell_x \cdot \ell_{x+1}}{\ell_x + \ell_{x+1}}$

(Α) II, III, IV (Β) I, III, IV (Γ) I, II, IV (Δ) I, II, III (Ε) Όλα

Ερώτηση 22η

Σε ένα πρότυπο τριών αιτίων εξόδου δίνεται $q'^{(1)}_{50} = 0{,}2$ και $q'^{(2)}_{50} = 0{,}1$. Επιπλέον ισχύουν:

- Τα ανεξάρτητα αίτια 1,2 κατανέμονται ομοιόμορφα.
- ${}_tp'^{(3)}_{50} = \begin{cases} 1 - 0{,}1 \cdot t^2, & 0 <= t < 1 \\ 0, & t = 1 \end{cases}$

Να βρεθεί η συνδυασμένη πιθανότητα $q^{(3)}_{50}$.

(Α) 0,081 (Β) 0,243 (Γ) 0,405 (Δ) 0,567 (Ε) 0,729

Ερώτηση 23η

Ένας αριθμός ατόμων παρατηρούνται από την ηλικία των 40, ένα άτομο πεθαίνει σε ηλικία 40,25 και ένα πεθαίνει σε ηλικία 40,75. Τα υπόλοιπα άτομα επιζούν μέχρι την ηλικία των 41 οπότε και αποχωρούν από την μελέτη. Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της πιθανότητας θανάτου q_{40}κάτω από την υπόθεση της εκθετικής κατανομής συμβολίζεται με $\hat{q}^E_{40}$. Αντίστοιχα ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της πιθανότητας θανάτου q_{40} κάτω από την υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής συμβολίζεται με $\hat{q}^U_{40}$. Αν ισχύει $\hat{q}^U_{40} = \hat{q}^E_{40} + 0{,}001023$ να βρείτε το πλήθος του αρχικού πληθυσμού.

(Α) 5 (Β) 7 (Γ) 9 (Δ) 11 (Ε) 13

Ερώτηση 24η

Σε μία κλινική μελέτη 5 ατόμων δίνεται ότι η συνάρτηση επιβίωσης των ατόμων αυτών περιγράφεται από την συνάρτηση ℓ_x όπως παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

$\boldsymbol{x}$	0	1	2	3
$\boldsymbol{\ell_x}$	100	ℓ_1	20	0

Οι αναμενόμενοι θάνατοι στο διάστημα (0,1] είναι περισσότεροι από ότι στο διάστημα (1,2]. Η αδέσμευτη διακύμανση του αριθμού των θανάτων στο διάστημα (1,2] για το δείγμα των πέντε ατόμων ισούται με 1,1375. Να βρεθεί η πιθανότητα να συμβούν δύο θάνατοι στο (0,1], δύο στο (1,2] και ένας στο (2,3].

(Α) 0,06 (Β) 0,08 (Γ) 0,10 (Δ) 0,13 (Ε) 0,15