ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ** **ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:	**Επίθετο:**			
Ημερομηνία:	**Πρωί:**		**Απόγευμα:**	**x**
Θεματική ενότητα:				

1. **(α) (3 βαθμοί)** Οι τιμές δύο παράγωγων προϊόντων X και Y σε κάθε χρονική στιγμή t είναι X_t και Y_t με $X_t = \int_0^t e^{-s^2} dW_s$ και $Y_t = X_t^2 - \int_0^t e^{-2s^2} ds$, ενώ η W_t είναι ανέλιξη Wiener.
Να δείξετε ότι οι αναμενόμενες τιμές τους παραμένουν αμετάβλητες στο χρόνο. Πώς ονομάζεται αυτή η ιδιότητα;
(β) Για τις τιμές των εντάσεων ανατοκισμού r_t ισχύει $\frac{dr_t}{dW_t} = \sigma$ για $t > 0$ όπου W_t ανέλιξη Wiener και $\sigma > 0$, ενώ στο $t = 0$ η ένταση ανατοκισμού είναι r_0.
(i) (1 βαθμός) Να δείξετε ότι $r_t = r_0 + \sigma W_t$
(ii) (5 βαθμοί) Να δείξετε ότι η συσσωρευμένη αξία ποσού K_0 τη χρονική στιγμή t αναμένεται να είναι
$K_0 e^{r_0 t} e^{\frac{1}{6}\sigma^2 t^3}$ με τυπική απόκλιση $K_0 \left[e^{2r_0 t + \frac{1}{3}\sigma^2 t^3}\left(e^{\frac{1}{3}\sigma^2 t^3} - 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$.
Υπόδειξη: $\int_0^t W_s ds \sim N\left(0, \mathrm{Var} = \frac{t^3}{3}\right)$.
(γ) (1 βαθμός) Δικαίωμα αγοράς (call option) για μετοχή σημερινής τιμής 70 τιμάται 2,67 , ενώ το αντίστοιχο δικαίωμα πώλησης (put option) τιμάται 10,91. Ποια είναι η προεξοφλημένη αξία σήμερα ($t = 0$) της τιμής άσκησης των δικαιωμάτων;

2. Κάτω από το μέτρο **P** , η τιμή μιας μετοχής X_t είναι αριθμητική κίνηση Brown με παραμέτρους μ και σ. Αν για την X_t γίνει αλλαγή του μέτρου σε **Q**, έτσι ώστε να εξακολουθεί να εκτελεί αριθμητική κίνηση Brown αλλά με διαφορετική παράμετρο μ' , τότε η παράγωγος Radon – Nikodym $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = e^{-\frac{1}{2}(1-\alpha)^2\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 t-(1-\alpha)\frac{\mu}{\sigma}W_t}$$, με $\alpha \neq 1$ και W_t η ανέλιξη Wiener της X_t.

(α) (1 βαθμός) Εξηγείστε τι σημαίνει ότι η διαδικασία X_t είναι αριθμητική κίνηση Brown κάτω από το μέτρο **P**.
(β) (1 βαθμός) Για τη διαδικασία X_t ,τι είναι η αλλαγή μέτρου από **P** σε **Q** και ποιος είναι ο κύριος λόγος που χρειάζεται να γίνει η αλλαγή μέτρου;
(γ) (4 βαθμοί) Κάτω από το μέτρο **Q** δώστε την κατανομή της ανέλιξης W_t και τη στοχαστική διαφορική εξίσωση της ανέλιξης X_t.
(δ) (4 βαθμοί) Να δείξετε ότι

$$E_{\mathbf{Q}}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right) = e^{\left[(1-\alpha)\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right]^2 \cdot t}$$

3. **(α) (5 βαθμοί)** Να δείξετε ότι η ελάχιστη διασπορά ενός χαρτοφυλακίου δύο μετοχών με κινδύνους σ_1 και σ_2 και συντελεστή συσχέτισης ρ, είναι $\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2\,(1-\rho^2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}$.

   (β) (1 βαθμός) Αν οι μετοχές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και η δεύτερη έχει διπλάσιο κίνδυνο από την πρώτη ($\sigma_2 = 2\sigma_1$), να δείξετε ότι η ελάχιστη διασπορά του χαρτοφυλακίου είναι 80% σ_1^2. Ποιά σύνθεση χαρτοφυλακίου επιτυγχάνει την ελάχιστη αυτή διασπορά;

   (γ) (4 βαθμοί) Έστω ότι ολόκληρη η αγορά αποτελείται από δύο μετοχές για τις οποίες είναι $\mu_1 = 8\%$, $\sigma_1 = 20\%$, $\mu_2 = 5\%$, $\sigma_2 = 15\%$, $\rho_{1,2} = \frac{1}{2}$ ενώ το ακίνδυνο επιτόκιο είναι 1%.
   Να δείξετε ότι τα ποσοστά συμμετοχής των μετοχών στην αγορά είναι 64,38% και 35,62%.

4. **(α) (3 βαθμοί)** Να δείξετε ότι η τιμή ενός μονοετούς ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς (call option) μετοχής S με $S_0 = 20$ και τιμή άσκησης 20 είναι η ίδια στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

- Η τιμή της μετοχής στο τέλος του έτους θα ανέβει κατά 10% ή θα κατέβει κατά 10%.
- Η τιμή της μετοχής αλλάζει σε συνεχή χρόνο, εκτελώντας γεωμετρική κίνηση Brown με πτητικότητα $\sigma = 11{,}6079\%$.

Η ακίνδυνη ένταση ανατοκισμού είναι $\delta = 4\%$. Δίδονται $N(0{,}40263) = 0{,}656391$ και $N(0{,}28655) = 0{,}612773$.

(β) Θεωρούμε μια γεωμετρική κίνηση Brown με συντελεστές μ και σ. Έστω r_f η ακίνδυνη ένταση ανατοκισμού.

(i) (2 βαθμοί) Αν $\mu > r_f$ και $\sigma = 0$, να δείξετε ότι το κεφάλαιο που διακινδυνεύεται είναι πάντα μηδέν. Εξηγείστε γιατί συμβαίνει αυτό.

(ii) (5 βαθμοί) Αν $\mu = 0$ και κάποιος επενδυτής θέλει το διακινδυνευόμενο κεφάλαιο για ένα (1) έτος, σε επίπεδο εμπιστοσύνης α να είναι το μισό του αρχικά επενδυόμενου κεφαλαίου, να δείξετε ότι θα πρέπει να επενδύσει σε μια μετοχή της οποίας η πτητικότητα σ, να είναι η λύση της εξίσωσης:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 - \sigma \cdot N^{-1}(1-\alpha) + \ln\left(e^{r_f} - \frac{1}{2}\right) = 0 \ .$$

5. Τα επιτόκια της αγοράς Α ακολουθούν το πρότυπο Vasicek $dr_t = 0{,}35(0{,}05 - r_t)dt + 0{,}06dW_t$, ενώ τα επιτόκια της αγοράς Β ακολουθούν το ίδιο πρότυπο με διπλάσια πτητικότητα. Το επιτόκιο σήμερα ($t = 0$) και στις δύο αγορές είναι r_0 =10%.
(α) (3 βαθμοί) Να δείξετε ότι η τιμή ενός δεκαπενταετούς ομολόγου χωρίς κουπόνια, ονομαστικής αξίας 100 κοστίζει στην αγορά Β 60% παραπάνω από ότι κοστίζει στην αγορά Α. Να δικαιολογήσετε την αυξημένη τιμή της αγοράς Β.
(β) (2 βαθμοί) Ποια αρχική τιμή του επιτοκίου της αγοράς Β εξασφαλίζει ίδια τιμή των δεκαπενταετών ομολόγων και για τις δύο αγορές;
(γ) (2 βαθμοί) Ποιο είναι το ισοδύναμο αποτελεσματικό επιτόκιο για ομόλογο χωρίς κουπόνια που λήγει στο διηνεκές και για τις δύο αγορές;
(δ) (3 βαθμοί) Ποια είναι η πιθανότητα για την κάθε μια αγορά το μακροπρόθεσμο επιτόκιο να ξεπεράσει το αντίστοιχο ισοδύναμο αποτελεσματικό επιτόκιο του ερωτήματος (γ);
Δίδονται : N(0,20198)=0,580034 , N(0,20484)=0,581151, N(0,40983)=0,659035, N(0,41018)=0,659163.