| ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ | **ΕΝΤΥΠΟ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ** | **F3W2.PR09** |
|---|---|---|

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Όνομα:** | | **Επίθετο:** | | | |
| **Ημερομηνία:** 17/07/2017 | | **Πρωί:** | ✓ | **Απόγευμα:** | |
| **Θεματική ενότητα:** Αρχές Αναλογιστικής Προτυποποίησης, Κατασκευή και Αξιολόγηση Αναλογιστικών Προτύπων | | | | | |

**1.** Οι αναλογιστές μιας εταιρείας μοντελοποιούν την συχνότητα ατυχημάτων για την κάλυψη επιβατικών οχημάτων "θραύση κρυστάλλων". Έχουν καταλήξει ότι ο αριθμός των ζημιών με θραύση κρυστάλλων που αναγγέλλεται στην εταιρεία ανά χρόνο και ανά οδηγό, ακολουθεί κατανομή $Poisson$ με παράμετρο $\lambda$, όπου η $\lambda$ είναι τυχαία μεταβλητή και ακολουθεί κατανομή $Gamma$, με μέση τιμή 3 και διακύμανση 3. Να υπολογιστεί η πιθανότητα για έναν οδηγό που επιλέγεται τυχαία, να αναγγείλει στην εταιρεία όχι περισσότερες από μία ζημιές θραύσης κρυστάλλων μέσα στην επόμενη χρονιά.

(Α) 0,15 (Β) 0,19 (Γ) 0,20 (Δ) 0,24 (Ε) 0,31

**2.** Οι συνολικές αποζημιώσεις ενός χαρτοφυλακίου ακολουθούν μια κατανομή Poisson. Έχετε προσδιορίσει ότι, εάν η κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων είναι σταθερή, για να επιτευχθεί πλήρης αξιοπιστία είναι αναγκαίο ένα μέγεθος δείγματος 2670 αποζημιώσεων. Ποιο είναι το πλήθος των αποζημιώσεων που απαιτείται για πλήρη αξιοπιστία, εάν η κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων είναι λογαριθμική με μέση τιμή 1000 και διασπορά 1.500.000;

(Α) 6.650 (Β) 6.675 (Γ) 6.700 (Δ) 6.725 (Ε) 6.750

**3.** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με ροπογεννήτρια τη συνάρτηση:

$$M(\mathrm{t}) = \left(\frac{2+e^t}{3}\right)^9, \quad -\infty < t < \infty$$

Να υπολογιστεί η διακύμανση της τ.μ. $X$.

(Α) 2 (Β) 3 (Γ) 8 (Δ) 9 (Ε) 11

**4.** Σε ένα χαρτοφυλάκιο το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί κατανομή Pareto με παραμέτρους θ=50 και α= 3 και $F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{a}$, x>0, a>0. Το χαρτοφυλάκιο αντασφαλίζεται με αντασφάλιση Excess of Loss (XoL) με απαλλαγή (ιδία κράτηση) 20 ευρώ ανά ζημιά. Να υπολογισθεί το μέσο ύψος των αποζημιώσεων που υπερβαίνουν την απαλλαγή.

(Α) 5 (Β) 15 (Γ) 25 (Δ) 35 (Ε) 45

**5.** Το χαρτοφυλάκιο μιας ασφαλιστικής εταιρεία περιλαμβάνει έναν τύπο συμβολαίου με όριο συμβολαίου ($policy\ limit$) ύψους 10 νομισματικών μονάδων. Το ύψος της ζημιάς είναι τυχαία μεταβλητή και ακολουθεί την κατανομή:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{2}{y^3} & \gamma\iota\alpha\ y > 1 \\ 0 & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha}. \end{cases}$$

Ποια είναι η εκτιμώμενη τιμή της αποζημίωσης για αυτόν τον τύπο συμβολαίων;

(Α) 1,0 (Β) 1,3 (Γ) 1,8 (Δ) 1,9 (Ε) 2,0

**6.** Δίνεται ένα τυχαίο δείγμα δύο τιμών από μια κατανομή F:

1 3

Γίνεται εκτίμηση της $\theta(F) = Var(x)$, χρησιμοποιώντας τον εκτιμητή:

$$g(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2}(x_i - \bar{x})^2, \text{ όπου } \bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2}.$$

Να υπολογιστεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ($MSE$), με χρήση της μεθόδου $Bootstrap$.

(Α) 0,0 (Β) 0,5 (Γ) 1,0 (Δ) 2,0 (Ε) 2,5

**7.** Έστω ότι το ύψος των αποζημιώσεων X~Exponential $(\lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}$, όπου $\lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ με α=1,5 και β=1. Αν σε μια περίοδο παρατήρησης σημειώθηκε μια αποζημίωση ύψους 2, το ασφάλιστρο κατά Buhlmann για την επόμενη περίοδο είναι:

(Α) λιγότερο από 1,00

(Β) μεταξύ 1,00 και 1,25

(Γ) μεταξύ 1,25 και 1,50

(Δ) μεταξύ 1,50 και 1,75

(Ε) τουλάχιστον 1,75

**8.** Δίνονται $p(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} + e^{-2x}$ και $\theta = \frac{5}{9}$. Να βρεθεί η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$.

(Α) $\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{5}u} + \frac{1}{7} e^{-\frac{25}{14}u}$ (Β) $\frac{45}{74} e^{-\frac{2}{5}u} + \frac{9}{259} e^{-\frac{15}{14}u}$ (Γ) $\frac{4}{7} e^{-\frac{2}{5}u} + \frac{1}{14} e^{-\frac{15}{14}u}$

(Δ) $\frac{45}{74} e^{-\frac{1}{5}u} + \frac{9}{259} e^{-\frac{25}{14}u}$ (Ε) $\frac{4}{7} e^{-\frac{1}{5}u} + \frac{1}{14} e^{-\frac{25}{14}}$

**9.** Δίνονται τα παρακάτω:

α) Μια ασφαλιστική εταιρεία, σε έναν τύπο ασφαλιστηρίων συμβολαίων της, εφαρμόζει απαλλαγή ύψους 100 μονάδων. Την τελευταία χρονιά, από τον συγκεκριμένο τύπο συμβολαίων, αναγγέλθηκαν τα παρακάτω ποσά ζημιών και αφορούν το σύνολο της ζημιάς:

120 180 200 270 300 1.000 2.500

β) Ζημιές με ποσά μικρότερα των 100 μονάδων δεν αναγγέλλονται στην εταιρεία.

γ) Οι ζημιές μοντελοποιούνται με χρήση της κατανομή $Pareto$ με σ.π.π:

$$f(x) = \frac{a400^a}{(x+400)^{a+1}}$$

Χρησιμοποιώντας τον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας για το α, να βρεθεί η αναμενόμενη ζημιά χωρίς απαλλαγή.

(Α) Μικρότερη από 500

(Β) τουλάχιστον 500 αλλά μικρότερη από 1.000

(Γ) τουλάχιστον 1.000 αλλά μικρότερη από 1.500

(Δ) τουλάχιστον 1.500 αλλά μικρότερη από 2.000

(Ε) τουλάχιστον 2.000

**10.** Έστω ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από τρεις κατηγορίες ασφαλισμένων Α, Β και Γ. Κάθε κατηγορία περιέχει το ίδιο πλήθος ασφαλισμένων. Για κάθε ασφαλισμένο ανεξαρτήτως κατηγορίας, η πιθανότητα να μην συμβεί καμία ζημιά σε ένα έτος είναι ½ και η πιθανότητα να συμβεί μια ζημιά είναι επίσης ½. Αν συμβεί ζημιά, το ύψος της μπορεί να είναι 1 η 2. Η κατανομή του ύψους της ζημιάς ανάλογα με την κατηγορία είναι η ακόλουθη:

$$P\left(\mathrm{X} = \mathrm{x} \,\middle|\, \text{συμβαίνει ζημιά \& ο ασφαλισμένος ανήκει στην κατηγορία Α}\right) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \mathrm{x}=1 \\ \frac{1}{3}, & \mathrm{x}=2 \end{cases}$$

$$P\left(\mathrm{X} = \mathrm{x} \,\middle|\, \text{συμβαίνει ζημιά \& ο ασφαλισμένος ανήκει στην κατηγορία Β}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \mathrm{x}=1 \\ \frac{1}{2}, & \mathrm{x}=2 \end{cases}$$

$$P\left(\mathrm{X} = \mathrm{x} \,\middle|\, \text{συμβαίνει ζημιά \& ο ασφαλισμένος ανήκει στην κατηγορία Γ}\right) = \begin{cases} \frac{5}{6}, & \mathrm{x}=1 \\ \frac{1}{6}, & \mathrm{x}=2 \end{cases}$$

Για έναν ασφαλισμένο που επιλέχθηκε τυχαία από το χαρτοφυλάκιο να υπολογισθεί η πιθανότητα ο ασφαλισμένος αυτός να ανήκει στην κατηγορία Α δοθέντος ότι για τον ασφαλισμένο αυτόν παρατηρήθηκε μια αποζημίωση ύψους 2.

(Α) $1/6$ (Β) $1/3$ (Γ) $1/2$ (Δ) $2/3$ (Ε) $5/6$

**11.** Έστω $X$ συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Να υπολογιστεί η $E(X|X \geq 0)$.

(Α) 0 (Β) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (Γ) $\frac{1}{2}$ (Δ) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ (Ε) 1

**12.** Ένα συμβόλαιο εκδίδεται με σκοπό να καλυφθεί ο ασφαλισμένος από κίνδυνο που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1000]$. Σε ποιο επίπεδο πρέπει να οριστεί η απαλλαγή, ώστε η αναμενόμενη πληρωμή να είναι το $25\%$ της πληρωμής που θα γινόταν σε περίπτωση που δεν υπήρχε απαλλαγή;

(Α) 250 (Β) 375 (Γ) 500 (Δ) 625 (Ε) 750

**13.** Είστε ο παραγωγός σε ένα τηλεπαιχνίδι γνώσεων, το οποίο δίνει για έπαθλο χρηματικά βραβεία. Ο αριθμός των βραβείων, $N$, και το ύψος των βραβείων, $X$, έχουν τις ακόλουθες κατανομές:

| n | Pr(N=n) |
|---|---|
| 1 | 0,8 |
| 2 | 0,2 |

| x | Pr(X=x) |
|---|---|
| 0 | 0,2 |
| 100 | 0,7 |
| 1.000 | 0,1 |

Το κεφάλαιο το οποίο προϋπολογίζετε ότι θα διαθέσετε για τα βραβεία, είναι ίσο με την αναμενόμενη τιμή συν την τυπική απόκλιση των συνολικών βραβείων. Να εκτιμήσετε το ύψος του κεφαλαίου το οποίο θα διαθέσετε για τα βραβεία.

(Α) 306 (Β) 316 (Γ) 416 (Δ) 510 (Ε) 518

**14.** Οι συνολικές αποζημιώσεις $S$ ακολουθούν σύνθετη $Poisson$, με τις επιμέρους αποζημιώσεις να ακολουθούν την εξής κατανομή:

| $x$ | $Pr(X = x)$ |
|---|---|
| 1 | 1/3 |
| 3 | 2/3 |

Ισχύει επίσης ότι: $Pr(S = 4) = Pr(S = 3) + 6Pr(S = 1)$.
Να προσδιοριστεί η $Var(S)$.

(Α) 76 (Β) 78 (Γ) 80 (Δ) 82 (Ε) 84

**15.** Έστω τ.μ. $Y_i$ , $i = 1,2,\dots,9$, που συμβολίζει το ύψος της ζημιάς ανά άτομο, από μια ομάδα 9 ατόμων. Η ασφάλεια πληρώνει το υπερβάλλον του ποσού των 10.000€ ανά ζημιά. Η κατανομή του $Y_i$ δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

| $Y$ | $Pr(Y_i = y)$ |
|---|---|
| 0 | 0,10 |
| 100 | 0,80 |
| 50.000 | 0,09 |
| 100.000 | 0,01 |

Προσομοιώνετε τα $Y_i$, $i = 1,2,\dots,9$, χρησιμοποιώντας την παρακάτω ακολουθία τυχαίων αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]:

| | | |
|---|---|---|
| 0,250 | 0,002 | 0,910 |
| 0,640 | 0,995 | 0,890 |
| 0,780 | 0,300 | 0,350 |

Να εκτιμήσετε το μέσο ποσό ανά άτομο που θα πληρωθεί από την ασφάλεια.

(Α) 14.500€ (Β) 15.000€ (Γ) 15.500€ (Δ) 16.000€
(Ε) 16.500€

**16.** Οι συνολικές αποζημιώσεις ακολουθούν σύνθετη $Poisson$ κατανομή. Το ετήσιο αποτέλεσμα $G$ έχει σ.π.:

$$\begin{cases} Pr(G = -n) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n, & n = 1,2,3,\dots \\ Pr(G = n) = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}, & n = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

Να βρεθεί ο συντελεστής προσαρμογής $R$.

(Α) $\ln\frac{150}{68}$ (Β) $\ln\frac{75}{68}$ (Γ) $\ln\frac{150}{34}$ (Δ) $\ln\frac{75}{34}$ (Ε) $\ln\frac{50}{34}$

**17.** Να βρεθεί η σ.π.π της τ.μ. $L_1$ για κίνδυνο με σ.π.π $f_X(x) = \frac{24}{(x+2)^4}$, $x \geq 0$.

(Α) $\frac{8}{(x+2)^2}$ (Β) $\frac{4}{(x+2)^2}$ (Γ) $\frac{4}{(x+2)^3}$ (Δ) $\frac{8}{(x+2)^3}$ (Ε) $\frac{16}{(x+2)^3}$

**18.** Ένα άτομο επιλέγεται τυχαία από τον πληθυσμό και έστω ότι για το άτομο σε μια περίοδο παρατηρήθηκε ζημιά ύψους Χ. Αν ο θεωρητικός μέσος μ για το άτομο αυτό είναι ίσος με 2/3 και $\frac{\mathrm{E(V)}}{\mathrm{V(E)}} = 119$ να προσδιορισθεί το ασφάλιστρο κατά Buhlmann.

(Α) 0,0083Χ+0,661

(Β) 0,0083Χ+0,0083

(Γ) 0,661+0,661

(Δ) 0,661Χ+0,0083

(Ε) 0,334Χ+0,334

**19.** Δίνεται το ακόλουθο χαρτοφυλάκιο ανεξάρτητων κινδύνων:

| $n$ | $q$ | $\mu$ | $\sigma^2$ |
|---|---|---|---|
| $n_1$ | 0,01 | $10^6$ | $10^{10}$ |
| $n_2$ | 0,02 | $\frac{1}{4}10^6$ | $\frac{1}{4}10^{10}$ |

Αν για τις συνολικές αποζημιώσεις $S$ έχουμε $E(S) = 10^7$ και $Var(S) = 8{,}51 \times 10^{12}$, να βρεθούν τα $n_1, n_2$.

(Α) $n_1 = 400$ $n_2 = 600$

(Β) $n_1 = 400$ $n_2 = 800$

(Γ) $n_1 = 600$ $n_2 = 400$

(Δ) $n_1 = 600$ $n_2 = 800$

(Ε) $n_1 = 800$ $n_2 = 400$

**20.** Η $S$ είναι σύνθετη $Poisson$ με παράμετρο $\lambda$ και $Pr(X=0)=Pr(X=1)=\frac{1}{2}$. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της $S$.

(Α) $\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\kappa}$ (Β) $\frac{2}{2-\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\kappa}$ (Γ) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!}\right)$

(Δ) $e^{-\frac{\lambda}{2}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\kappa}}{\kappa!}}$ (Ε) $e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^{\kappa}}{\kappa!}$

**21.** Σε ένα χαρτοφυλάκιο το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή και το ύψος των αποζημιώσεων ακολουθεί εκθετική κατανομή. Για να εξασφαλισθεί πλήρης αξιοπιστία ώστε με πιθανότητα 90% οι συνολικές αποζημιώσεις που θα συμβούν να μην αποκλίνουν από τις αναμενόμενες αποζημιώσεις περισσότερο από θ=5%, απαιτείται πλήθος 5412 αποζημιώσεων. Αν στο ίδιο χαρτοφυλάκιο η κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων παραμείνει αρνητική διωνυμική με μέσο και διασπορά αυξημένους κατά 20%, και η κατανομή για το ύψος των αποζημιώσεων δεν μεταβληθεί καθόλου, να προσδιορισθεί το πλήθος των αποζημιώσεων που απαιτείται για να εξασφαλισθεί πλήρης αξιοπιστία με τις ίδιες συνθήκες.

(Α) λιγότερο από 5.400

(Β) μεταξύ 5.400 και 5.500

(Γ) μεταξύ 5.500 και 5.600

(Δ) μεταξύ 5.600 και 5.700

(Ε) τουλάχιστον 5.700

**22.** Σε ένα χαρτοφυλάκιο το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ=2 και το ύψος των αποζημιώσεων μπορεί να παίρνει τις ακόλουθες τιμές:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα } 0{,}4 \\ 2, & \text{με πιθανότητα } 0{,}2 \\ 3, & \text{με πιθανότητα } 0{,}4 \end{cases}$$

Το χαρτοφυλάκιο αντασφαλίζεται με αντασφάλιση τύπου Stop Loss με ετήσια απαλλαγή 2. Να υπολογισθεί η μέση αποζημίωση που θα επιβαρύνει τον αντασφαλιστή $\mathrm{E}\left(\tilde{\tilde{S}}\right)$.

Σημείωση: $\mathrm{E}\left(\tilde{\tilde{S}}\right) = \mathrm{E}[(S-2)_+] = \mathrm{E}[\mathrm{Max}(S-2;0)]$

(A) $2{,}8\ \mathrm{e}^{-2}$

(B) $1 + 2{,}8\ \mathrm{e}^{-2}$

(Γ) $2 + 2{,}8\ \mathrm{e}^{-2}$

(Δ) $4 - 2{,}8\ \mathrm{e}^{-2}$

(E) $5 - 2{,}8\ \mathrm{e}^{-2}$

**23.** Έστω ότι το ύψος των ζημιών ενός ατόμου ακολουθεί κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x) = \frac{e^{-x/1000}}{1000}, 0 < x < \infty$$

Το άτομο αυτό ασφαλίζεται σε μια εταιρεία με ετήσια απαλλαγή 500 ευρώ ανά ζημιά, δηλαδή η εταιρεία αποζημιώνει το ποσό της αποζημίωσης πέραν των €500.

Να προσδιορισθεί ο λόγος των αναμενόμενων αποζημιώσεων του ατόμου μετά την ασφάλιση του σε σχέση με τις αναμενόμενες αποζημιώσεις πριν την ασφάλιση του (Loss Elimination Ratio).

(Α) λιγότερο από 0,20

(Β) μεταξύ 0,20 και 0,30

(Γ) μεταξύ 0,30 και 0,50

(Δ) μεταξύ 0,50 και 0,70

(Ε) τουλάχιστον 0,70

**24.** Ας υποθέσουμε ότι το πλήθος των αποζημιώσεων ενός έτους για έναν ασφαλισμένο πληθυσμό έχει κατανομή Poisson. Ας υποθέσουμε επίσης ότι η αναμενόμενη ετήσια συχνότητα αποζημιώσεων του ασφαλισμένου πληθυσμού (παράμετρος Λ της κατανομής Poisson) είναι τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1). Δεδομένου ότι ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία από τον πληθυσμό παρατηρήθηκε να έχει 0 αποζημιώσεις για ένα έτος να υπολογισθεί η σ.π.π. της ύστερης κατανομής του Λ.

(Α) $\frac{1}{1-e^{-1}}$ (Β) $\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-1}}$ (Γ) $\frac{2e^{-\lambda}}{1-e^{-2}}$ (Δ) $\frac{e^{-\lambda}-1}{1-e^{-1}}$ (Ε) 1