ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:	**Επίθετο:**			
Ημερομηνία:	**Πρωί:**		**Απόγευμα:**	**x**
Θεματική ενότητα: Χρηματοοικονομικά πρότυπα				

1. **(α) (1βαθμός)** Να εξηγήσετε γιατί το μοντέλο της αριθμητικής κίνησης Brown δεν είναι απόλυτα ρεαλιστικό.

   (β) (2 βαθμοί) Η μετοχή A εκτελεί αριθμητική κίνηση Brown με παραμέτρους μ και σ και αρχική τιμή 1. Να δείξετε ότι η απόδοση της μετοχής τη χρονική στιγμή t ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο $\mu \cdot t$ και διασπορά $\sigma^2 \cdot t$. Ως απόδοση θεωρούμε το λόγο $(A_t - A_0)/A_0$.

   (γ) (4 βαθμοί) Δημιουργούμε χαρτοφυλάκιο μετοχών A και B των οποίων ο συντελεστής συσχέτισης τη χρονική στιγμή t είναι $\frac{1}{1+t}$. Οι μετοχές εκτελούν αριθμητική κίνηση Brown με παραμέτρους (μ_A, σ_A) και (μ_B, σ_B) και αρχική τιμή 1. Να δείξετε ότι τα ποσοστά του χαρτοφυλακίου ελάχιστης διασποράς τη χρονική στιγμή t εκτιμούνται σε

   $$x_A(t) = \frac{\sigma_B^2 t - (\sigma_A - \sigma_B)\sigma_B}{(\sigma_A - \sigma_B)^2 + (\sigma_A^2 + \sigma_B^2)t} \quad \text{και} \quad x_B(t) = \frac{\sigma_A^2 t - (\sigma_B - \sigma_A)\sigma_A}{(\sigma_A - \sigma_B)^2 + (\sigma_A^2 + \sigma_B^2)t}$$

   (δ) (3 βαθμοί) Να δείξετε ότι σε βάθος χρόνου τα αντίστοιχα ποσοστά θα διαμορφωθούν ως εξής:

   $$x_A = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \quad \text{και} \quad x_B = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$, η ελάχιστη διασπορά θα γίνει $\sigma_{\min}^2 = \frac{\sigma_A^2 \sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$,

   ενώ η αναμενόμενη απόδοση θα είναι $\mu = \frac{\mu_A \sigma_A^2 + \mu_B \sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$.

2. Θεωρούμε ένα παράγωγο προϊόν B επί της μετοχής S , η αξία του οποίου τη χρονική στιγμή t είναι :

   $B_t = \frac{S_t}{1 + S_t} e^{r.(T-t)+\sigma}$, όπου S_t η τιμή της μετοχής , r η ακίνδυνη ένταση ανατοκισμού, T ο χρόνος λήξης του παραγώγου και σ η πτητικότητα της μετοχής.

   (α) (2 βαθμοί) Να δείξετε ότι τα Δέλτα (Delta) , Γάμμα (Gamma) και Vega του παραγώγου B είναι

   $$\Delta_t = \frac{B_t}{S_t(1 + S_t)}, \qquad \Gamma_t = -\frac{2}{1 + S_t}\Delta_t \quad \text{και} \quad V_t = B_t$$

   (β) (1 βαθμός) Για ποιο λόγο ένας επενδυτής που κατέχει το παράγωγο προϊόν B θα ήθελε να δημιουργήσει ένα Δέλτα – ουδέτερο χαρτοφυλάκιο;

   (γ) (4 βαθμοί) Αν $S_0 = 10$, $r = 2\%$, $T = 1$ και $\sigma = 20\%$, αμέσως μετά την πώληση στο $t = 0$ χιλίων παραγώγων, να εξηγήσετε πως θα δημιουργηθεί ένα Δέλτα – ουδέτερο χαρτοφυλάκιο που να απαρτίζεται εκτός από τα 1.000 παράγωγα που πουλήθηκαν από μετοχές και ομόλογα ονομαστικής αξίας 1 χωρίς κουπόνια. Να δείξετε ότι για το ανωτέρω χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να αγοραστούν 10,298 μετοχές και 1.029,82 ομόλογα.

   (δ) (3 βαθμοί) Αν την επόμενη ημέρα ($t = 1/365$) η τιμή της μετοχής διαμορφωθεί σε 11, να δείξετε ότι χωρίς θωράκιση η ζημιά είναι 9,30793 ενώ με θωράκιση (τη δημιουργία δηλαδή του Δέλτα – ουδέτερου χαρτοφυλακίου) υπάρχει οριακό κέρδος το οποίο είναι 0,98443.

3. **(α) (4 βαθμοί)** Δικαίωμα αγοράς (call option) με λήξη σε 4 περιόδους τιμάται 3,2833. Η αναμενόμενη τιμή της υποκείμενης στο δικαίωμα μετοχής δεδομένου ότι στη λήξη του δικαιώματος η τιμή της θα υπερβεί την τιμή άσκησης είναι 1,1237 φορές την αναμενόμενη τιμή της μετοχής στη λήξη. Η πιθανότητα να ασκηθεί το δικαίωμα στη λήξη είναι 66,533%. Ποια είναι η αρχική τιμή της μετοχής, αν η τιμή άσκησης είναι 19 και η ακίνδυνη ένταση ανατοκισμού είναι 2%;
(β) (2 βαθμοί) Σε ένα διωνυμικό δένδρο η τιμή της μετοχής Α που τώρα είναι α θα διαμορφωθεί σε α·(1+ε) ή α·(1-ε) , όπου $0 < \varepsilon < 1$. Αν απαιτήσουμε η κινδυνοουδέτερη πιθανότητα να είναι p, να δείξετε ότι η ένταση ανατοκισμού πρέπει να είναι $\ln[1 - \varepsilon \cdot (1 - 2p)]$.
(γ) (4 βαθμοί) Να δείξετε οτι για να ισχύει $d(tX_t) = [(X_0 + \mu)t + X_t]dt + \sigma\mu t dW_t$, όπου W_t Wiener, θα πρέπει η στοχαστική διαδικασία X_t να είναι η $X_t = (X_0 + \mu)t + \sigma\mu W_t$.

4. **(α) (2 βαθμός)** Τι είναι το χαρτοφυλάκιο της αγοράς;
(β) (8 βαθμοί) Να δείξετε ότι η απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς (r_M) συνδέεται με το ακίνδυνο επιτόκιο (r_f) μέσω της σχέσης
$r_M = \dfrac{(\tilde{\mathbf{r}} - r_f\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{C}^{-1}\tilde{\mathbf{r}}'}{(\tilde{\mathbf{r}} - r_f\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{C}^{-1}\tilde{\mathbf{u}}'}$, όπου $\tilde{\mathbf{r}}$ το διάνυσμα των αποδόσεων των μετοχών, **C** ο πίνακας διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεων και $\tilde{\mathbf{u}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα.

5. **(α) (5 βαθμοί)** Μια χρηματοροή καταβάλλει ποσό f(t) σε κάθε χρονική στιγμή t>0. Αν η τυπική απόκλιση της μέσης διάρκειας της χρηματοροής είναι $\frac{\sqrt{2}}{\delta}$, όπου δ>0 η ένταση ανατοκισμού, να εκφραστεί η μέση διάρκεια και η κυρτότητα της χρηματοροής σαν συνάρτηση της έντασης ανατοκισμού. Στη συνέχεια να δείξετε ότι η παρούσα αξία της χρηματοροής είναι $\frac{1}{\delta^2}$ ενώ η χρηματοροή είναι η f(t)= t .
(β) (5 βαθμοί) Να δείξετε ότι το κεφάλαιο που διακινδυνεύεται μετά την αγορά μιας μετοχής αξίας S_0 , για χρονικό διάστημα t , και σε επίπεδο εμπιστοσύνης α, δεδομένου ότι το επιτόκιο είναι μηδέν και η μετοχή εκτελεί αριθμητική κίνηση Brown με παραμέτρους μ και σ , είναι :
$\mathrm{VaR} = -\mu t - \sigma\sqrt{t}\, N^{-1}(1 - \alpha)$, όπου $N^{-1}(x)$ η αντίστροφη της αθροιστικής συνάρτησης της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.