ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:	**Επίθετο:**			
Ημερομηνία:	**Πρωί:**		**Απόγευμα:**	**x**
Θεματική ενότητα: Χρηματοοικονομικά πρότυπα				

1. **α)** Θεωρούμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (σ.δ.ε.) $dX_t = \sigma X_t dW_t$, όπου W_t ανέλιξη Wiener και $X_0 = 1$.
(i) Να λυθεί η παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση. (ii) Θεωρούμε δύο επενδυτικά προϊόντα X και Y, οι αποδόσεις των οποίων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, ενώ οι τιμές τους ικανοποιούν τις σ.δ.ε. $dX_t = \sigma X_t dW_t$ και $dY_t = 2\sigma Y_t dW_t$, με $X_0 = Y_0 = 1$. Τη χρονική στιγμή t δημιουργούμε χαρτοφυλάκιο με ποσοστό λ_t για το X και $1 - \lambda_t$ για το Y. Να δείξετε ότι το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς επιτυγχάνεται όταν
$$\lambda_t = \frac{1 + e^{\sigma^2 t} + e^{2\sigma^2 t} + e^{3\sigma^2 t}}{2 + e^{\sigma^2 t} + e^{2\sigma^2 t} + e^{3\sigma^2 t}}$$
(iii) Να δείξετε ότι μακροπρόθεσμα το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς των παραπάνω μετοχών θα αποτελείται μόνο από την μετοχή X.
β) Μια χρηματοροή καταβάλλει τη στιγμή t , $0 < t < 1$, ποσό 1-t , ενώ μία άλλη καταβάλλει την ίδια στιγμή ποσό t . Αν η ένταση ανατοκισμού είναι μηδέν , να δείξετε ότι οι διασπορές της μέσης διάρκειας των δύο χρηματοροών είναι ίδιες.

2. **α)** Ένα εκατομμύριο ευρώ θα επενδυθούν στην αγορά της μετοχής "Κ" , η τιμή της οποίας είναι 100. Υπάρχουν επίσης οι μετοχές "Λ" και "Μ" με σημερινή τιμή 50 και 20. Σε ένα έτος οι τιμές των μετοχών θα διαμορφωθούν σύμφωνα με τα εξής δύο σενάρια:

	Κ	Λ	Μ
Σενάριο Ι	180	30	5
Σενάριο ΙΙ	30	60	25

(i) Αν ο επενδυτής θελήσει να θωρακιστεί (hedging) έναντι του ενδεχομένου πτώσης της μετοχής Κ , με αγορά της μετοχής Λ , να δείξετε ότι πρέπει να αγοράσει 50.000 μετοχές Λ. (ii) Αν ο επενδυτής θελήσει να θωρακιστεί (hedging) έναντι του ενδεχομένου πτώσης της μετοχής Κ, με αγορά της μετοχής Μ, να δείξετε ότι πρέπει να αγοράσει 75.000 μετοχές Μ. (iii) Ανάμεσα στις δύο παραπάνω δυνατότητες θωράκισης, ποια συμφέρει να επιλέξει ο επενδυτής;
β) (i) Να οριστεί ο δείκτης Sharpe για στοιχείο με απόδοση r και κίνδυνο σ, όταν το ακίνδυνο επιτόκιο είναι r_f . Ποιο είναι το νόημα του δείκτη Sharpe; (ii) χαρτοφυλάκιο απαρτίζεται από n στοιχεία που φέρουν κίνδυνο σ_i και αποδόσεις r_i , $i = 1, \dots, n$, σε αναλογία w_i , με $w_1 + \cdots + w_n = 1$. Να δείξετε ότι αν S_i είναι ο δείκτης Sharpe του στοιχείου i, τότε για το δείκτη Sharpe του χαρτοφυλακίου S_p ισχύει: $S_p = w_1 \frac{\sigma_1}{\sigma_p} S_1 + \cdots + w_n \frac{\sigma_n}{\sigma_p} S_n$
(iii) Αν το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από στοιχείο που φέρει κίνδυνο σ_1 και από ακίνδυνο στοιχείο, να δείξετε ότι $S_p = S_1$ ανεξαρτήτως σύνθεσης χαρτοφυλακίου. (iv) Αν σχηματίσουμε χαρτοφυλάκιο n στοιχείων, απολύτως εξαρτημένων μεταξύ τους, τα οποία φέρουν τον ίδιο ακριβώς κίνδυνο και σε αναλογία 1/n για το καθένα, να δείξετε ότι ο δείκτης Sharpe του χαρτοφυλακίου δεν μπορεί να υπερβεί το μέγιστο από τους δείκτες Sharpe των στοιχείων του χαρτοφυλακίου.

3. Επενδυτής που επιθυμεί απόδοση 15% έχει δύο επιλογές:
Επιλογή Ι : Τοποθέτηση του συνόλου των κεφαλαίων του στη μετοχή Α, για την οποία αναμένεται απόδοση 15%, με κίνδυνο $\sigma_A = 40\%$.
Επιλογή ΙΙ : Τοποθέτηση των κεφαλαίων του σε χαρτοφυλάκιο μετοχών που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Το χαρτοφυλάκιο, εκτός από την παραπάνω μετοχή Α, περιλαμβάνει και τις μετοχές Β και Γ για τις οποίες είναι:
$\mu_B = 14\%$, $\sigma_B = 25\%$, $\mu_\Gamma = 8\%$, $\sigma_\Gamma = 15\%$.
Δείξτε ότι η επιλογή ΙΙ θα μειώσει κατά 41% τον κίνδυνο σε σχέση με την επιλογή Ι.

4. **α)** Η μετοχή S έχει σημερινή τιμή S_0 και σε ένα έτος είτε θα ανεβεί σε $S_0(1+\alpha)$, είτε θα κατέβει σε $S_0(1-\alpha)$ όπου $0 < \alpha < 1$. Ένα δικαίωμα αγοράς (call option) επί της παραπάνω μετοχής με τιμή άσκησης $K = S_0$ και λήξη σε ένα έτος πωλείται έναντι ποσού c_0 , ενώ το επιτόκιο είναι μηδέν. (i) Να δείξετε ότι η κινδυνοουδέτερη πιθανότητα ανόδου της μετοχής είναι 1/2. (ii) Να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση της τιμής της μετοχής σε ένα έτος από τώρα, βάσει της κινδυνοουδέτερης πιθανότητας ανόδου είναι $\sigma_1 = S_0\alpha$. (iii)Να δείξετε ότι η τιμή του δικαιώματος αγοράς c_0 και του αντίστοιχου δικαιώματος πώλησης p_0 είναι $c_0 = p_0 = \frac{1}{2}\sigma_1$ και να δικαιολογήσετε αυτή την ισότητα.
β) Η αξία του επενδυτικού προϊόντος Ε σε χρόνο t ($t > 0$) είναι στοχαστική διαδικασία E_t η οποία ακολουθεί την κατανομή Weibull, της οποίας η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι
$F(x) = P[E_t \le x] = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{rt}}$, όπου $x > 0$, $\beta > 0$ και r η ακίνδυνη ένταση ανατοκισμού.
Η αρχική αξία του Ε είναι 5 και το κεφάλαιο προς επένδυση είναι 100. (i) Να δείξετε ότι το κεφάλαιο που διακινδυνεύεται σε t περιόδους, με πιθανότητα 99,5% είναι
$100 \cdot \left[e^{r\cdot t} - 0{,}20 \cdot \beta \cdot (0{,}00501)^{\left(\frac{1}{r\cdot t}\right)}\right]$. (ii) Να δείξετε ότι για $\beta \ge 5 \cdot (e^{rt} - 1) \cdot (0{,}00501)^{-\frac{1}{rt}}$ το διακινδυνευόμενο κεφάλαιο είναι μικρότερο του αρχικού κεφαλαίου.

5. Θεωρούμε την ανέλιξη Wiener W_t και δύο χρονικές στιγμές s και t για τις οποίες $0 \le s \le t$.
(i) Στηριζόμενοι στη σχέση $E(W_t W_s)=\min(t , s)$ να δείξετε ότι $Cov(W_t , W_s)=s$.
(ii) Θεωρούμε τις διαδικασίες aW_t και $bW_s - cW_t$.
Να δείξετε ότι για να είναι οι δύο διαδικασίες ασυσχέτιστες μεταξύ τους ($\rho = 0$) θα πρέπει να ισχύει $b/c = t/s$ ενώ για να είναι οι δύο διαδικασίες απολύτως συσχετισμένες μεταξύ τους ($\rho = 1$ ή $\rho = -1$) θα πρέπει να είναι $t = s$.