ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:	**Επίθετο:**		
Ημερομηνία: 30/6/2023	**Πρωί:**	**Απόγευμα:**	**x**
Θεματική ενότητα: Χρηματοοικονομικά πρότυπα (Αε)			

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1ο

Μια μετοχή με σημερινή τιμή 1, σε μια χρονική περίοδο θα πάρει είτε την τιμή 1+u, 0 < u < 1 είτε την τιμή $\frac{1}{1+u}$. Το ακίνδυνο επιτόκιο είναι i. Θεωρούμε ένα δικαίωμα αγοράς της μετοχής σε μια χρονική περίοδο με τιμή άσκησης K = 1 + u - α, όπου $0 < \alpha < 1 + u - \frac{1}{1+u}$.

α) (**2 βαθμοί**) Να δείξετε ότι με μια μικρή μεταβολή του ακίνδυνου επιτοκίου Δi η μεταβολή της κινδυνοουδέτερης πιθανότητας ανόδου της μετοχής είναι $\frac{1}{u} \cdot \frac{1+u}{2+u} \cdot \Delta i$.

β) (**1 βαθμός**) Να δείξετε ότι η χωρίς δυνατότητα βέβαιου κέρδους τιμή αγοράς αυτού του δικαιώματος είναι $c_0 = \alpha p v$ όπου v ο προεξοφλητικός παράγοντας και p η κινδυνοουδέτερη πιθανότητα ανόδου.

γ) (**3 βαθμοί**) Αν απαιτήσουμε η τιμή του δικαιώματος c_0 να είναι ένα ποσοστό λ (0 < λ < 1) του ποσού που θα εισπραχθεί σε περίπτωση ανόδου της τιμής της μετοχής (payoff), ποιο πρέπει να είναι το ακίνδυνο επιτόκιο;

δ) (**4 βαθμοί**) Να εξηγήσετε γιατί ένας επενδυτής δεν θα προχωρήσει ποτέ στην αγορά του παραπάνω δικαιώματος όταν α·v·(1-p) < 1, όπου v ο προεξοφλητικός παράγοντας και p η κινδυνοουδέτερη πιθανότητα ανόδου.

Θέμα 2ο

α) (**4 βαθμοί**) Ένα τετραετές call option επί της μετοχής Μ, η τιμή της οποίας απεικονίζεται με ένα διωνυμικό δένδρο, έχει τιμή άσκησης 1,50. Η μετοχή έχει αρχική τιμή 1 και το εύρος των τιμών της στη λήξη του δικαιώματος, ανάμεσα σε 4 διαδοχικές ανόδους και 4 διαδοχικές καθόδους είναι 1,5089. Σε περίπτωση που η ίδια μετοχή καταγράψει διαδοχικά 2 ανόδους και 2 καθόδους η τιμή της θα είναι 0,6480. Αν το ακίνδυνο επιτόκιο είναι 1,20%, ποια είναι η τιμή του call που δεν επιφέρει βέβαιο κέρδος;

β) (**3 βαθμοί**) Η τιμή ενός επενδυτικού προϊόντος f_t περιγράφεται από την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$df_t = \left(15W_t^4 - 6{W_t}^2 - 1\right)dt + 2W_t(3W_t^4 - 2W_t^2 - 1)dW_t \text{ με } W_t \text{ ανέλιξη Wiener}$$

Να δείξετε ότι η λύση της εξίσωσης είναι η $f_t = W_t^6 - W_t^4 - W_t^2 + 1$.

γ) (**3 βαθμοί**) Να δείξετε ότι στο ερώτημα (β), η αναμενόμενη τιμή της f_t είναι $15t^3 - 3t^2 - t + 1$ και στηριζόμενοι στην παραπάνω αναμενόμενη τιμή, να δείξετε ότι για $t = \frac{1+\sqrt{6}}{15} \cong 0{,}23$ η $E(f_t)$ παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή η οποία είναι $\frac{208-12\sqrt{6}}{225} \cong 0{,}794$.

Θέμα 3ο

Η αγορά αποτελείται από τις μετοχές Α,Β και Γ, οι αποδόσεις των οποίων είναι 5%, 7% και 2% αντίστοιχα, με πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0{,}0038813 & 0{,}000433 & -0{,}0013083 \\ 0{,}000433 & 0{,}0048303 & -0{,}0007298 \\ -0{,}0013083 & -0{,}0007298 & 0{,}0012250 \end{pmatrix}$$

Για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο η αποτελεσματική μεθόριος έχει εξίσωση:

$\sigma^2 = 2{,}96182 \cdot r^2 - 0{,}204044 \cdot r + 0{,}003812$

και επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις:

$\mathbf{uC^{-1}}$= (892,955 ; 433,4 ; 2.028,186)

$\mathbf{\mu C^{-1}}$ = (31,674 ; 21,132 ; 62,743)

$\mathbf{uC^{-1}\mu'}$ = 115,54953

$\mathbf{\mu C^{-1}\mu'}$ = 4,3178159

$\mathbf{uC^{-1}u'}$ = 3.354,542

όπου u το μοναδιαίο διάνυσμα και μ το διάνυσμα των αποδόσεων.

α) (**3 βαθμοί**) Να δείξετε ότι το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς είναι (26,619% , 12,92% , 60,461%) με αναμενόμενη απόδοση 3,44% και κίνδυνο (τυπική απόκλιση) 1,726%. Στη συνέχεια να επαληθευτεί ότι το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς έχει πράγματι την πιο μικρή διασπορά παίρνοντας ένα αυθαίρετο χαρτοφυλάκιο και δείχνοντας ότι η διασπορά του είναι μεγαλύτερη από $(1{,}726\%)^2$

β) (**3 βαθμοί**) Επενδυτής επιθυμεί αναμενόμενη απόδοση 6%. Να δείξετε ότι η σύνθεση του χαρτοφυλακίου που θα του επιφέρει τον ελάχιστο κίνδυνο είναι προσεγγιστικά (34%, 60%, 6%). Ποιος είναι ο ελάχιστος δυνατός κίνδυνος για την επιθυμητή απόδοση 6%;

γ) (**4 βαθμοί**) Στο χαρτοφυλάκιο των Α, Β, Γ προστίθεται και ένα ακίνδυνο στοιχείο: Ένα ομόλογο με απόδοση 1%. Να δείξετε ότι η απόδοση και η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου της αγοράς είναι 3,86% και 1,87%, ενώ η σύνθεσή του είναι (27,8% , 20,5% , 51,8%).

Θέμα 4º

Η μετοχή S για την οποία $S_0 = 1$, έχει στοχαστική διαφορική εξίσωση (Σ.Δ.Ε.) $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$ κάτω από το μέτρο **P** και $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widehat{B}_t$ κάτω από το μέτρο $\widehat{\mathbf{P}}$.

α) (**1 βαθμός**) Να εξηγήσετε τις κατανομές που εκφράζουν τα μέτρα **P** και $\widehat{\mathbf{P}}$.

β) (**3 βαθμοί**) Αν δεχτούμε ότι στην πραγματικότητα ισχύει το μέτρο **P**, αλλά θέλουμε να δούμε την εξέλιξη της μετοχής κάτω από το μέτρο $\widehat{\mathbf{P}}$, να δείξετε ότι ξεκινώντας από την πρώτη Σ.Δ.Ε., κάνοντας το μετασχηματισμό $\widehat{B}_t = \frac{\mu - r}{\sigma} \cdot t + B_t$ και δεχόμενοι ότι η $\widehat{B}_t$ είναι ανέλιξη Wiener θα καταλήξουμε στη δεύτερη Σ.Δ.Ε..

γ) (**3 βαθμοί**) Να δείξετε ότι η παράγωγος Radon – Nikodym, $\frac{d\widehat{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}}$ είναι $\frac{d\widehat{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = e^{-\frac{\mu - r}{\sigma} \cdot B_t - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 \cdot t}$.

δ) (**1 βαθμός**) Δώστε τη λύση της Σ.Δ.Ε. της μετοχής κάτω και από τα δύο μέτρα.

ε) (**2 βαθμοί**) Να δείξετε ότι $E_{\widehat{\mathbf{P}}}(B_t) + E_{\mathbf{P}}(\widehat{B}_t) = 0$.

Θέμα 5ο

α) (**3 βαθμοί**) Έστω ότι $dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t$ και $dY_t = \beta Y_t dt + \sigma^* Y_t dW_t$ με W_t ανέλιξη Wiener με ίδιες τυχαίες τιμές και στις δύο γεωμετρικές κινήσεις Brown. Να δείξετε ότι το ακίνδυνο επιτόκιο είναι $\frac{\beta\sigma - \alpha\sigma^*}{\sigma - \sigma^*}$.

β) (**2 βαθμοί**) Οι μετοχές X και Y εκτελούν γεωμετρική κίνηση Brown με στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις $X_t = 5\% X_t dt + 20\% X_t dW_t$ και $dY_t = 4\% Y_t dt + 10\% Y_t dW_t$ με W_t ανέλιξη Wiener. Ποιο είναι το ακίνδυνο επιτόκιο που απαγορεύει την δυνατότητα βέβαιου κέρδους;

γ) (**5 βαθμοί**) Κεφάλαιο K επενδύεται σε παράγωγο προϊόν για n περιόδους. Στο τέλος της επενδυτικής περιόδου η ελάχιστη τιμή της επένδυσης θα είναι $\alpha \cdot K$ με $0 < \alpha < 1$ και βεβαιότητα 99%, ενώ είναι γνωστό ότι στην έναρξη της επένδυσης το κεφάλαιο που διακινδυνεύεται είναι $b \cdot K$, με $0 < b < 1$ με βεβαιότητα επίσης 99%. Αν το επιτόκιο είναι i, να δείξετε ότι $n = \frac{\ln(\alpha + b)}{\ln(1+i)}$ με $\alpha + b > 1$.